线性代数习题解答

武汉工学院教学教研室编

第 一 章 行 列 式

§ 1. 行列式的概念

1. 试用行列式解方程组:

(1) $\begin{cases} x\operatorname{tg}\alpha + y = \sin(\alpha+\beta) \\ x - y\operatorname{tg}\alpha = \cos(\alpha+\beta) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+\omega y+\omega^2 z=\omega \\ x+\omega^2 y+\omega z=\omega^2 \end{cases}$ 其中 ω 是1的虚立方根

解:(1)这时

$$D=\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & 1 \\ 1 & -\operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix} = -\operatorname{tg}^2\alpha-1=-\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} \sin(\alpha+\beta) & 1 \\ \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix} = -\operatorname{tg}\alpha\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

$$=-\frac{\sin\alpha(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)}{\cos\alpha}-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

$$=-\frac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\cos\alpha}-\cos\alpha\cos\beta=-\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & \sin(\alpha+\beta) \\ 1 & \cos(\alpha+\beta) \end{vmatrix} = \operatorname{tg}\alpha\cos(\alpha+\beta)-\operatorname{sis}(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{\sin\alpha(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)}{\cos\alpha}-(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=-\frac{\sin^2\alpha\sin\beta}{\cos\alpha}-\cos\alpha\sin\beta=-\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$$

因此

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}}{-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=\cos\alpha\cos\beta,$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{-\dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha}}{-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=\cos\alpha\sin\beta$$

（2）这时

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{vmatrix}=\omega^2+\omega^2+\omega^2-\omega-\omega^4-\omega=3\omega^2-3\omega$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\\omega&\omega&\omega^2\\\omega^2&\omega^2&\omega\end{vmatrix}=0,\qquad D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{vmatrix}=3\omega^2-3\omega,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega\\1&\omega^2&\omega^2\end{vmatrix}=0$$

因此

$$x=\frac{D_1}{D}=0,\qquad y=\frac{D_2}{D}=1,\qquad z=\frac{D_3}{D}=0.$$

2． 写出 4 阶行列式中所有带负号并包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项。

解：在 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$

中，含 $a_{11}a_{23}$ 的一般项是 $\pm a_{11}a_{23}a_{3p}a_{4q}$，这里 p，q 是2，4 的所有排列：2，4；4，2．因此含 $a_{11}a_{23}$ 的项有两个，即 $\pm a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$，$\pm a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$．而带负号的是 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$。

3． 用行列式的定义，计算：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&0&0&0\\a_{41}&a_{42}&0&0&0\\a_{51}&a_{52}&0&0&0\end{vmatrix}$$

解：由行列式的定义可知，展开式中每项是 5 个元素的乘积，每行一个，每列一个，因此它可写成

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5},$$

其中第一个附标是按自然顺序 1,2,3,4,5 排列， 第二个附标 p_1,p_2,p_3,p_4,p_5 是 1，2，3，4，5，的一个排列。 在展开式中的任何一项 $\pm a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}$ 中的 p_3,p_4,p_5， 至少有一个数取 3、4、5 中的某一个， 即任何一项中至少有一个因子是零， 因此行列式的值为零。

4． 在一个 n 阶行列式中等于零的元如果比 n^2-n 还多， 那末此行列式等于零。为什么？

解： 因为 n 阶行列式的展开式中，每一项都是行列互不相同的 n 个元素的乘积。现在这个 n 阶行列式不为零的元素比 $n^2-(n^2-n)=n$ 还少， 这就是说， 展开式中每一项都至少含有一个零元素，故此行列式等于零。

5． 行列式中任一项的各元是否都可以用互换两行或两列把它移到新行列式的主对角线上？

解 可以。因为在 n 阶行列式的展开式中，任何一项都是 n 个因子的乘积，它们在不同的行，不同的列。所以，经过行或列的互换，总可以使 n 个因子在新行列式的主对角线上。

6． 假如把行列式中每项的 n 个元移到次对角线上，是否也能找出它的符号规律？

解： 因为二阶及三阶行列式次对角线上的元的乘积 $-a_{12}a_{21}$ 和 $-a_{13}a_{22}a_{31}$ 带负号， 而四阶行列式次对角线上的元的乘积 $+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 带正号。所以 n 阶行列式中每项的 n 个元移到次对角线上不能找出一般符号规律。

§2. 行列式的基本性质

1． 计算行列式：

$$(1)\begin{vmatrix}1&2&0&1\\1&3&5&0\\0&1&5&6\\1&2&3&4\end{vmatrix}\qquad(2)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}$$

$$(3)\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}\qquad(4)\begin{vmatrix}a-b-c&2a&2a\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$$

$$(5)\begin{vmatrix}1&3&3&\cdots&3\\3&2&3&\cdots&3\\3&3&3&\cdots&3\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\3&3&3&\cdots&n\end{vmatrix}\qquad(6)\begin{vmatrix}a&b&b&b\\a&b&a&b\\a&a&b&a\\b&b&b&a\end{vmatrix}$$

解： （1）把第 1 行的各元乘以 -1 加到第 2 行和第 4 行的各对应元

$$\text{原行列式}=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&1&5&6\\0&0&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&-1\\1&5&6\\0&3&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&5&-1\\0&0&7\\0&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&7\\3&3\end{vmatrix}=-21$$

（2）把第 1 行的各元乘以 -1加到第 2 行、第 3 行和第 4 行的对应元上

$$\text{原行列式}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{vmatrix}=-8$$

（3）把第四行的各元乘以 -1加到第 2 行和第 3 行的对应元

$$\text{原行列式}=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&2\\-1&1\end{vmatrix}=-3$$

（4）首先把第 3 列的各元乘以 -1 加到第 1 列的对应元素上，再把所得行列式的第 1 行的各元加到第 3 行的对应元上

$$\text{原行列式}=\begin{vmatrix}-a-b-c&2a&2a\\0&b-c-a&2b\\c+a+b&2c&c-a-b\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-a-b-c&2a&2a\\0&-a+b-c&2b\\0&2a+2b&a+c-b\end{vmatrix}$$

$$=-(a+b+c)\begin{vmatrix}-a+b-c&2b\\2a+2c&a+c-b\end{vmatrix}$$

$$=-(a+b+c)\begin{vmatrix}a+b+c&a+b+c\\2a+2c&a+c-b\end{vmatrix}$$

$$=-(a+b+c)^2\begin{vmatrix}1&1\\2a+2c&a+c-b\end{vmatrix}=-(a+b+c)^2(a+c-b-2a-2c)$$

$$=(a+b+c)^3$$

(5)把第 3 行的各元乘以 -1 加到其他各行的对应元上，将其结果把第 3 行与第 1 行对调，再对第二次的结果，把第 1 列与第 3 列对调

$$
原式=\begin{vmatrix}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-3
\end{vmatrix}
$$

$$
=-\begin{vmatrix}
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3\\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-3
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3\\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-3
\end{vmatrix}=3\cdot 2\cdot(n-3)!=6\cdot(n-3)!
$$

(6)把第 1 行的各元乘以 -1 加到其他各行的对应元上，再将所得的行列式的第 2 列的各元乘以 -1 加到第三列和第 4 列的对应元上，再将第 2 次得到的行列式的第 4 列和第 3 列的元依次加到第 1 列和第 2 列的对应元上

$$
原式=\begin{vmatrix}
a & b & b & b\\
0 & 0 & a-b & 0\\
0 & a-b & 0 & a-b\\
b-a & 0 & 0 & a-b
\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}
a & b & 0 & 0\\
0 & a-b & a-b & 0\\
0 & 0 & b-a & 0\\
0 & 0 & 0 & a-b
\end{vmatrix}=a(b-a)^3
$$

2。 证明下列两式：

（1） $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} = a^4$$

（2） $$\begin{vmatrix} by+az & bz+ax & bx+ay \\ bx+ay & by+az & bz+ax \\ bz+ax & bx+ay & by+az \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

证：（1）引用性质4三次，我们有

$$原式左边=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 0 & 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ 3a & 7a+3b \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ 0 & a \end{vmatrix}$$

$= a^4 =$ 右边

（2）引用性质2和性质3，

$$原式左边=\begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bx & by & bz \\ bz & bx & by \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & ay \\ bx & by & ax \\ bz & bx & az \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ax & bx \\ bx & az & bz \\ bz & ay & by \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ax & ay \\ bx & az & ax \\ bz & ay & az \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} az & bz & bx \\ ay & by & bz \\ ax & bx & by \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} az & bz & ay \\ ay & by & ax \\ ax & bx & az \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} az & ax & bx \\ ay & az & bz \\ ax & ay & by \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} az & ax & ay \\ ay & az & ax \\ ax & ay & az \end{vmatrix}$$

$$= b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix} + 0+0+0+0+0+0 + a^3\begin{vmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} + a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = 右边$$

3． 行列式 A 中每个数 a_{ij} 分别用 $b^{i-j}(b\neq 0)$ 去乘，问得到的行列式是否与 A 一致？

解： $$\begin{vmatrix} b^{1-1}a_{11} & b^{1-2}a_{12} & \cdots & b^{1-n}a_{1n} \\ b^{2-1}a_{21} & b^{2-2}a_{22} & \cdots & b^{2-n}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1}a_{n-1} & b^{n-2}a_{n2} & \cdots & b^{n-n}a_{nn} \end{vmatrix} = b^{1+2+\cdots+n}\begin{vmatrix} b^{-1}a_{11} & b^{-2}a_{12} & \cdots & b^{-n}a_{1n} \\ b^{-1}a_{21} & b^{-2}a_{22} & \cdots & b^{-n}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{-1}b_{n1} & b^{-2}a_{n2} & \cdots & b^{-n}a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= b^{1+2+\cdots+n} b^{-1-2-\cdots-n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所以与A一致，没有改变。

4．证明

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{vmatrix}$$

证：三阶行列式的展开式共六项，每项包括三个因式，这三个因式分别是不同的行和列的元，于是

$$\text{原式左边} = \frac{d}{dt}\Big[a_{11}(t)a_{22}(t)a_{33}(t) + a_{21}(t)a_{32}(t)a_{13}(t) + a_{31}(t)a_{23}(t)a_{12}(t)$$

$$- a_{13}(t)a_{22}(t)a_{31}(t) - a_{11}(t)a_{23}(t)a_{32}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t)a_{33}(t)\Big]$$

$$= a'_{11}(t)a_{22}(t)a_{33}(t) - a'_{12}(t)a_{21}(t)a_{33}(t) - a'_{13}(t)a_{22}(t)a_{31}(t)$$

$$+ a'_{21}(t)a_{32}(t)a_{13}(t) + a'_{31}(t)a_{23}(t)a_{12}(t) - a'_{11}(t)a_{23}(t)a_{32}(t)$$

$$+ a'_{11}(t)a_{22}(t)a_{33}(t) + a_{21}(t)a'_{32}(t)a_{13}(t) + a_{31}(t)a'_{23}(t)a_{12}(t)$$

$$- a_{13}(t)a'_{22}(t)a_{31}(t) - a_{11}(t)a'_{23}(t)a_{32}(t) - a_{12}(t)a'_{21}(t)a_{33}(t)$$

$$+ a_{11}(t)a_{22}(t)a'_{33}(t) + a_{21}(t)a_{32}(t)a'_{13}(t) + a_{31}(t)a_{23}(t)a'_{12}(t)$$

$$- a_{13}(t)a_{22}(t)a'_{31}(t) - a_{11}(t)a_{23}(t)a'_{32}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t)a'_{33}(t)$$

$$= a'_{11}(t)\begin{vmatrix} a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} - a'_{12}(t)\begin{vmatrix} a_{21}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) \end{vmatrix} + a'_{13}(t)\begin{vmatrix} a_{21}(t) & a_{22}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) \end{vmatrix}$$

$$- a'_{21}(t)\begin{vmatrix} a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + a'_{22}(t)\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{13}(t) \\ a_{31}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} - a'_{23}(t)\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) \end{vmatrix}$$

$$+ a'_{31}(t)\begin{vmatrix} a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{22}(t) & a_{23}(t) \end{vmatrix} - a'_{32}(t)\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{23}(t) \end{vmatrix} + a'_{33}(t)\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{vmatrix}$$

所以　　　　左边＝右边

上面证明可以简写如下：

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{d}{dt}\sum\pm(a)_{1p_1}(t)a_{2p_2}(t)a_{3p_3}(t)\right)=\sum\pm\left(\frac{d}{dt}(a_{1p_1}(t)a_{2p_2}(t)a_{3p_3}(t)\right)$$

$$=\sum\pm[(a'_{1p_1}(t)a_{2p_2}(t)a_{3p_3}(t))+a_{1p_1}(t)a'_{2p_2}(t)a_{3p_3}(t)+a_{1p_1}a_{2p_2}a'_{3p_3}]$$

$$=\sum\pm a'_{1p_1}(t)a_{2p_2}(t)a_{3p_3}(t)+\sum\pm a_{1p_1}(t)a'_{2p_2}(t)a_{3p_3}(t)+\sum\pm a_{1p_1}a_{2p_2}a'_{3p_3}$$

$$=\begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{vmatrix}$$

本题得证。

§ 3.　行列式的计算

1．计算行列式：

$$(1)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}\qquad (2)\ \begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & c & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$$

$$(3)\ \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}\qquad (4)\ \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

解：（1）利用性质 4 把第 1 列的各元乘以 −3加到第3列的对应元上，乘以 −2加到第2列

的对应元上，然后按第 4 行展开。对三阶行列式再利用性质 4 。

$$原式=\begin{vmatrix}1&-1&-1&3\\3&-7&-10&2\\2&-1&-7&-1\\1&0&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-1&-1&3\\-7&-10&2\\-1&-7&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&-1&3\\0&-3&-19\\0&-6&-4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-3&-19\\-6&-4\end{vmatrix}=-162$$

（2） 由定理 1，按最后一行展开

$$原式 =(-1)^{5+5}v\begin{vmatrix}x&a&b&0\\0&y&0&0\\0&c&z&0\\g&h&k&u\end{vmatrix}=(-1)^{4+4}vu\begin{vmatrix}x&a&b\\0&y&0\\0&c&z\end{vmatrix}$$

$$=uvx\begin{vmatrix}y&0\\c&z\end{vmatrix}=xyzuv$$

（3） 由拉普拉斯展开式

$$原式 =(-1)^{1+2+5+6}\begin{vmatrix}3&2\\4&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}7&4&9&7\\5&3&6&1\\0&0&5&6\\0&0&6&8\end{vmatrix}=(-1)^{3+4+3+4}(9-8)\begin{vmatrix}7&4\\5&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}5&6\\6&8\end{vmatrix}$$

$$=1(21-20)(40-36)=4$$

（4） 定理 1

$$原式 =(-1)^{n+n}a\begin{vmatrix}a&0&0&\cdots&0\\0&a&0&\cdots&0\\0&0&a&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&a\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}0&0&0&\cdots&0&1\\0&a&0&\cdots&0&0\\0&0&a&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a&0\end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{1+n-1}\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{2n+1}a^{n-2}=a^{n-2}(a^2-1)$$

2. 证明 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a \end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

证 由定理 1，按最后一行展开

$$\text{原式左 边}=(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+2}a_{n-1}\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{n+n}(x+a_1)\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1}+(-1)^{n-2}a_{n-1}(-1)^{n-2}x+\cdots+(x+a_1)x^{n-1}$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

3. 试用拉普拉斯定理计算：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 & \omega^2 & c_2 & \omega \\ a_3 & b_3 & 1 & \omega & c_3 & \omega_2 \\ 1 & \omega^2 & 0 & 0 & \omega & 0 \end{vmatrix}$ 这里 ω 是 1 的虚立方根

（2）$\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \diagup & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \diagup & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$ 上 n 行，下 n 行

解： 用拉普拉斯定理

$$原式 =(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & c_1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & c_2 & \omega \\ 1 & \omega & c_3 & \omega^2 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2+1+5}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & 1 & 1 & 1 \\ b_2 & 1 & \omega^2 & \omega \\ b_3 & 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2+2+5}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \omega & \omega^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & \omega^2 & \omega \\ a_3 & 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega \end{vmatrix}(-1)^{4+3}\omega\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 \end{vmatrix}(-)^{4+1}\omega^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}$$

$$+\omega\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega \end{vmatrix}(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}\left(\omega^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 \end{vmatrix}-2\omega\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega \end{vmatrix}\right)$$

$$=(3\omega-3\omega^2)(\omega-\omega^2-2\omega^2+2\omega)=(3\omega-3\omega^2)^2$$

$$=9\omega^2(1-\omega)^2$$

（2） 原式 $=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \diagup & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \diagup & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}\begin{matrix} \}n-1\text{行} \\ \\ \\ \\ \\ \}n-1\text{行} \end{matrix} = (a^2-b^2)\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \diagup & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \diagup & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}\begin{matrix} \}n-1\text{行} \\ \\ \\ \\ \\ \}n-1\text{行} \end{matrix}$

$$=(a^2-b^2)\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \diagup & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \diagup & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}\begin{matrix} \}n-2\text{行} \\ \\ \\ \\ \\ \}n-2\text{行} \end{matrix} = (a^2-b^2)^2\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \diagup & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \diagup & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}\begin{matrix} \}n-2\text{行} \\ \\ \\ \\ \\ \}n-2\text{行} \end{matrix}$$

$$=\cdots=(a^2-b^2)^n$$

4. 引用范得蒙行列式计算下列两式：

（1） $$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

（2） $$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

这里 $a_i\neq 0$，$i=1, 2, \cdots, n+1$

解：（1）经过行的调换，将原行列式化为范得蒙行列式。

$$\text{原式}=(-1)^{(n-1)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{(n-1)+(n-2)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ a^n & (a-1) & \cdots & (a-n)^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & (a-1)^2 & \cdots & (a-n)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{n+1 \geqslant i > j \geqslant 1} [(a+1-i)-(a+1-j)]$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{n+1 \geqslant i > j \geqslant 1} (j-i)$$

（2） 用行列式性质 1

$$\text{原式} = a_1^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2 b^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \cdots & \cdots & b_{n+1}^n \end{vmatrix} = \cdots$$

$$= a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right) & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 a_2 \cdots a_{n+1})^n \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n+1} \left(\frac{b_i}{a_i} - \frac{b_j}{a_j}\right)$$

$$= (a_1 a_2 \cdots a_{n+1})^n \frac{\prod\limits_{n+1 \geqslant i > j \geqslant 1} (a_j b_i - a_i b_j)}{\prod\limits_{n+1 \geqslant i > j \geqslant 1} a_i a_j}$$

$$= \frac{(a_1 a_2 \cdots a_{n+1})^n \prod\limits_{n+1 \geqslant i > j \geqslant 1} (a_j b_i - a_i b_j)}{(a_{n+1}a_n \cdot a_{n+1}a_{n-1} \cdot \cdots \cdot a_{n+1}a_1) \cdots (a_2 a_1)}$$

$$= \frac{(a_1 a_2 \cdots a_{n+1})^n \prod\limits_{n+1 \geqslant i > j \geqslant 1} (a_j b_i - a_i b_j)}{(a_{n+1}^n a_n a_{n-1} \cdots a_1)(a_n^{n-1} a_{n-1} \cdots a_1) \cdots (a_2 a_1)}$$

$$= \frac{(a_1 a_2 \cdots a_{n+1})^n \prod\limits_{n+1 \geqslant i > j \geqslant 1} (a_j b_i - a_i b_j)}{(a_1 a_2 \cdots a_{n+1})^n}$$

$$= \prod_{n+1 \geqslant i > j \geqslant 1} (a_j b_i - a_i b_j)$$

5. 用数学归纳法证明：

(1) $$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

(2) $$D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

证：(1)当 $n=1$ 时，左边 $=D_1=a+b$，右边 $=\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$，左边 = 右边，公式成立。当 $n=2$ 时，左边 $=D_2=\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}=a^2+ab+b^2$，右边 $=\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$，公式成立。

假定当 $n=k-1$，和 $n=k-2$ 时公式成立，即

$$D_{k-1}=\frac{a^k-b^k}{a-b},\qquad D_{k-2}=\frac{a^{k-1}-b^{k-1}}{a-b},$$

成立，则

$$D_k=(a+b)D_{k-1}-ab\begin{vmatrix} 1 & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}=(a+b)D_{k-1}-abD_{k-2}$$

$$=\frac{(a+b)(a^k-b^k)}{a-b}-ab\frac{a^{k-1}-b^{k-1}}{a-b}=\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}$$

故当 $n=k$ 时公式也成立，于是公式得证。

(2) 当 $n=1$ 时，$D_1=2\cos\theta=\frac{\sin(1+1)\theta}{\sin\theta}=$ 右边，公式成立，当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=4\cos^2\theta-1=2\cos^2\theta+\cos 2\theta$$

$$=\frac{\sin 2\theta\,\mathrm{con}\,\theta+\sin\theta\cos 2\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}.$$

假定当 $n=k-1$ 和 $n=k-2$ 时，公式成立，即

$$D_{k-1}=\frac{\sin k\theta}{\sin\theta} \quad 和 \quad D_{k-2}=\frac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}$$

成立，则

$$D_k=2\cos\theta D_{k-1}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$=2\cos\theta\, D_{k-1}-D_{k-2}=2\cos\theta\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{2\cos\theta\sin k\theta-\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(k+1)\theta+\sin(k-1)\theta-\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

故当 $n=k$ 时公式也成立，于是公式得证。

§ 4　克莱姆定理

1．试用克莱姆定理求解下列各线性方程组

（1）$\begin{cases} x_1+x_2+5x_3+7x_4=14 \\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4 \\ 7x_1+x_2+3x_3+5x_4=16 \end{cases}$ （2）$\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ ax+by+cz=a^2+b^2+c^2 \\ bcx+cay+abz=3abc \end{cases}$

（a、b、c 为互不相等的数）

解：（1）这里

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & -8 & -20 \\ 0 & 2 & -24 & -32 \\ 0 & -6 & -32 & -44 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -8 & -20 \\ 2 & -24 & -32 \\ -6 & -32 & -44 \end{vmatrix}$$

$$=2\times(-8)\times(-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 11 \end{vmatrix}=64\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 26 \end{vmatrix}=64\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 26 \end{vmatrix}=64\times 31$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 14 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 3 \\ 16 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 7 & -34 & -44 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -8 & -20 & 3 \\ 8 & -24 & -32 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2+4}2\begin{vmatrix}7&-34&-44\\2&-8&-20\\8&-24&-32\end{vmatrix}=2\times2\times8\begin{vmatrix}7&-34&-44\\1&-4&-10\\1&-3&-4\end{vmatrix}=64\begin{vmatrix}7&34&22\\1&4&5\\1&3&2\end{vmatrix}$$

$$=64\begin{vmatrix}0&13&8\\0&1&3\\1&3&2\end{vmatrix}=64\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}13&8\\1&3\end{vmatrix}=64\times31$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&14&5&7\\3&0&7&1\\5&4&1&3\\7&16&3&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&7&5&7\\3&0&7&1\\5&2&1&3\\7&8&3&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&7&5&7\\0&-21&-8&-20\\0&-33&-24&-32\\0&-41&-32&-44\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}-21&-8&-20\\-33&-24&-32\\-41&-32&-44\end{vmatrix}=-64\begin{vmatrix}21&1&5\\-30&0&-7\\-43&0&-9\end{vmatrix}=-64\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-30&-7\\-43&-9\end{vmatrix}$$

$$=-64\times31$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&14&7\\3&5&0&1\\5&7&4&3\\7&1&16&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-20&-34&14&7\\0&0&0&1\\-4&-8&4&3\\-8&-24&16&5\end{vmatrix}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}-20&-34&14\\-4&-8&4\\-8&-24&16\end{vmatrix}$$

$$=8\times4\times2=\times(-1)^2\begin{vmatrix}10&17&7\\1&2&1\\1&3&2\end{vmatrix}=64\begin{vmatrix}0&-13&-13\\0&-1&-1\\1&3&2\end{vmatrix}$$

$$=64\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-13&-13\\-1&-1\end{vmatrix}64\times0=0$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&5&14\\3&5&7&0\\5&7&1&4\\7&1&3&16\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&5&14\\0&2&-8&-42\\0&2&-24&-66\\0&-6&-32&-82\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&-8&-42\\2&-24&-66\\-6&-32&-82\end{vmatrix}$$

$$=2\times(-8)\times(-2)\begin{vmatrix}1&1&21\\1&3&33\\-3&4&41\end{vmatrix}=32\begin{vmatrix}1&1&21\\0&2&12\\0&7&104\end{vmatrix}=32\begin{vmatrix}2&12\\7&104\end{vmatrix}$$

$$=32\times124.$$

故

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{64\times 31}{64\times 31}=1,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-64\times 31}{64\times 31}=-1.$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{0}{64\times 31}=0.\qquad x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{32\times 124}{64\times 31}=2.$$

（2） 这时

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\bc&ca&ab\end{vmatrix}=ab^2+a^2c+bc^2-b^2c-ac^2-a^2b=(a-b)(b-c)(c-a),$$

因为 a、b、c 是互不相等的数，所以 $D\neq 0$。

$$D_1=\begin{vmatrix}a+b+c&1&1\\a^2+b^2+c^2&b&c\\3abc&ca&ab\end{vmatrix}=ab^2(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)ca+3abc^2$$

$$-3ab^2c-ac^2(a+b+c)-ab(a^2+b^2+c^2)$$

$$=a(a-b)(b-c)(c-a)$$

同理可得 $D_2=b(a-b)(b-c)(c-a)$，$D_3=c(a-b)(b-c)(c-a)$。

故 $$x=\frac{D_1}{D}=\frac{a(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=a,\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{b(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=b,$$

$$z=\frac{D_3}{D}=\frac{c(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=c$$

为方程组的唯一组解。

2. 求一个二次多项式 $f(x)$ 使 $f(1)=-1$，$f(-1)=9$，$f(2)=-3$。

解：设所求的二次多项式为 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 a、b、c 为待定系数。由于

$$f(1)=a+b+c=-1,\ f(-1)=a-b+c=9,\ f(2)=4a+2b+c=-3,$$

所以可得方程组

$$\begin{cases}a+b+c=-1\\a-b+c=6\\4a+2b+c=-3\end{cases}$$

这时

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\4&2&1\end{vmatrix}=6,\qquad D_1=\begin{vmatrix}-1&1&1\\9&-1&1\\-3&2&1\end{vmatrix}=6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&9&1\\4&-3&1\end{vmatrix}=-30,\qquad D_3=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&9\\4&2&-3\end{vmatrix}=18$$

故 $$a=\frac{D_1}{D}=\frac{6}{6}==1,\quad b=\frac{D_2}{D}=\frac{-30}{6}=-5,\quad c=\frac{D_3}{D}=\frac{18}{6}=3.$$

即所求的二次多项式 $f(x)=x^2-5x+3$。

3． 假定水银密度 h 与温度 t 的关系为

$$h=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3.$$

由实验测定得如下数据

t	0°	10°	20°	30°
h	13.6	13.57	13.55	13.52

求 $t=15°$，40°时水银的密度（准确到小数两位）。

解：由已给数据，则得方程组

$$\begin{cases}a_0=13.6\\a_0+10a_1+100a_2+1000a_3=13.57\\a_0+20a_1+400a_2+8000a_3=13.55\\a_0+30a_1+900a_2+27000a_3=13.52\end{cases}$$

这时

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&10&100&1000\\1&20&400&8000\\1&30&900&27000\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}10&100&1000\\20&400&8000\\36&900&27000\end{vmatrix}$$

$$=10\times100\times1000\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&8\\3&9&27\end{vmatrix}=12000000.$$

$$D_1=\begin{vmatrix}13.6&0&0&0\\12.57&10&100&1000\\13.55&20&400&8000\\13.52&30&900&27000\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\times13.6\begin{vmatrix}10&100&1000\\20&400&8000\\30&900&27000\end{vmatrix}=13.6\times12000000.$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&13.6&0&0\\1&13.57&100&1000\\1&13.55&400&8000\\1&13.52&900&27000\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&-0.03&100&1000\\1&-0.05&400&8000\\1&-0.08&900&2700\end{vmatrix}$$

$$=-(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0.03&100&1000\\0.05&400&8000\\0.08&900&27000\end{vmatrix}=-2000\times25.$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&0&13.6&0\\1&10&13.57&1000\\1&20&13.55&8000\\1&30&13.52&27000\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&10&-0.03&1000\\1&20&-0.05&8000\\1&30&-0.08&27000\end{vmatrix}$$

$$=(-1^{1+1}\begin{vmatrix}10&-0.03&1000\\20&-0.05&8000\\30&-0.08&27000\end{vmatrix}=1800.$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&0&0&13.6\\1&10&100&13.57\\1&20&400&13.55\\1&30&900&13.52\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&10&100&-0.03\\1&20&400&-0.05\\1&30&900&-0.08\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}10&100&-0.03\\20&400&-0.05\\30&900&-0.08\end{vmatrix}=-40.$$

故 $a_0=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{12000000\times13.6}{12000000}=13.6,\qquad a_1=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-50000}{12000000}=-\dfrac{5}{1200},$

$a_2==\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{1800}{12000000}=\dfrac{3}{20000},\qquad a_3=\dfrac{D_4}{D}=\dfrac{-40}{12000000}=-\dfrac{1}{300000}$

于是 $$h=13.6-\frac{5}{1200}t+\frac{3}{20000}t^2-\frac{1}{300000}t^3$$

当 $t=15°$时，$h=13.6-\dfrac{5}{1200}\times15+\dfrac{3}{20000}\times15^2-\dfrac{1}{300000}\times15^3=13.56.$

当 $t=40°$时，$h=13.6-\dfrac{5}{1200}\times40+\dfrac{3}{20000}\times40^2-\dfrac{1}{300000}\times40^3=13.46.$

第二章 线性方程组的数值解法

§ 1. 主元素消元法

1. 主元素和保留方程是唯一的吗？

解：主元素和保留方程不一定是唯一的，例如：方程组

$$\begin{cases} 5.36x + 2.63y - 1.27z = 3.69 \\ 2.95x - 5.36y + 1.92z = 0.813 \\ 1.49x + 2.91y - 4.37z = -2.15 \end{cases}$$

中绝对值最大的系数有两个，而采用的主元素不同就会用不同的方程作保留方程。

2. 用主元素消去法计算例 2 中系数行列式。

解：演算表格如下：

乘数	列数				检查和	说明
	1	2	3	4		
m_1	5	2	3	2	12	①
m_2	2	4	1	-2	5	②
m_3	1	-3	4	3	5	③
	3	2	2	8	15	④
k_1	$\frac{17}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$		$\frac{33}{4}$	⑤ = ① + m_1 × ④
	$\frac{11}{4}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{35}{4}$	⑥ = ② + m_2 × ④
k_3	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{13}{4}$		$-\frac{5}{8}$	⑦ = ③ + m_3 × ④
						⑧
l_1	$\frac{10}{3}$		2		$\frac{16}{3}$	⑨ = ⑤ + k_1 × ⑥
						⑩
	$\frac{52}{24}$		$\frac{9}{2}$		$\frac{160}{24}$	⑪ = ⑦ + k_3 × ⑥
						⑫
	$\frac{64}{27}$				$\frac{64}{27}$	⑬ = ⑨ + l_1 × ⑪

$$m_1=-\frac{1}{4},\ m_2=\frac{1}{4},\ m_3=-\frac{3}{8},\ k_1=-\frac{1}{3},\ k_3=\frac{5}{6},\ l_1=-\frac{4}{9}.$$

因此所给系数行列式为：

$$\begin{vmatrix} \frac{64}{27} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{4} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{52}{24} & 0 & \frac{9}{2} & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{64}{27} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{52}{24} & \frac{9}{2} & 0 & 0 \\ \frac{11}{4} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \frac{64}{27}\times\frac{9}{2}\times\frac{9}{2}\times 8 = 384.$$

§2. 简单迭代法

1. 判别下面迭代形式是否收敛

$$\begin{cases} x_1 = \quad 0.3x_1 - 0.1x_2 + 0.2x_3 - 0.25x_4 + 8 \\ x_2 = \quad 0.1x_1 + 0.4x_2 - 0.3x_3 - 0.3x_4 - 6 \\ x_3 = -0.15x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.1x_4 + 2 \\ x_4 = 0.3x_1 + 0.25x_2 - 0.25x_3 - 0.3x_4 - 3 \end{cases}$$

解：方程右端未知量 x_1，x_2，x_3，x_4 的系数的绝对值之和分别是：

$$0.3+0.1+0.15+0.3=0.85,\qquad 0.1+0.4+0.1+0.25=0.85,$$

$$0.2+0.3+0.2+0.25=0.95,\qquad 0.25+0.3+0.1+0.3=0.95.$$

其中最大值 $0.95<1$，根据定理 2，满足收敛条件，所以用简单迭代法求解时收敛。

2. 试把方程组

$$\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 - 33x_3 = 1 \\ -22x_1 + 11x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

化成收敛的迭代形式。

解：因为在第二个方程中 x_1 系数绝对值最大，且

$$22>11+1,$$

在第三个方程中 x_2 系数绝对值最大，且

$$4>2+1$$

在第一个方程中 x_3 系数绝对值最大，且

$$33>11+3$$

所以方程组可化成下面的迭代形式：

$$\begin{cases} x_1 = 0.5\ x_2 + 0.045\, x_3 \\ x_2 = 0.25\, x_1 + 0.5\ x_3 - 0.25 \\ x_3 = 0.33\, x_1 - 0.09\ x_2 - 0.03 \end{cases}$$

且对任何初始值它都是收敛的。

3．　用简单迭代法来解方程组

$$\begin{cases} 8x + y - 2z = 9 \\ 3x - 10y + z = 19 \\ 5x - 2y + 20z = 72 \end{cases}$$

解：按行的规则，这线性方程组适合主对角线元素强超条件，它的迭代形式为：

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{8}y + \frac{1}{4}z + \frac{9}{8} \\ y = \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}z - \frac{19}{10} \\ z = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{10}y + \frac{18}{5} \end{cases}$$

它对任何初始值都收敛，按简单迭代法，迭代公式为：

$$x^{(k+1)} = -0.125y^{(k)} + 0.25z^{(k)} + 1.125$$

$$y^{(k+1)} = 0.3\ x^{(k)} + 0.1\ z^{(k)} - 1.9$$

$$z^{(k+1)} = -0.25x^{(k)} + 0.1\ y^{(k)} + 3.6$$

演算表格如下：

	0	−0.125	0.25	1.125
	0.3	0	0.1	−1.9
	−0.25	0.1	0	3.6
初始近似值	0	0	0	
第一次近似值	1.125	−1.9	3.6	
第二次近似值	2.2625	−1.2025	3.1288	
第三次近似值	2.0575	−0.9084	2.9141	
第四次近似值	1.9671	−0.9913	2.9948	
第五次近似值	1.9976	−1.0104	3.0091	
第六次近似值	2.0036	−0.9998	2.9997	
第七次近似值	1.9999	−0.9990	2.9991	

所求的解：$x=1.9999$，$y=-0.9990$，$z=2.9991$。

§ 3　逐个迭代法

1. 使逐个迭代法求解方程组

$$\begin{cases} 5x+y+2w=1 \\ -x+4y+2z=-1.69 \\ 3x+6z-w=1.69 \\ x-2y+4w=3.21 \end{cases}$$

解：按行的规则，这个线性方程组适合主对角线元素强超条件，因此有收敛的迭代公式：

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= -0.2y^{(k)} - 0.4w^{(k)} + 0.2 \\ y^{(k+1)} &= 0.25x^{(k+1)} - 0.5z^{(k)} - 0.4225 \\ z^{(k+1)} &= -0.5x^{(k+1)} + 0.1667w^{(k)} + 0.2816 \\ w^{(k+1)} &= -0.25x^{(k+1)} + 0.5y^{(k+1)} + 0.8025 \end{aligned}$$

演算表格如下：

	0	−0.2	0	−0.4	0.2
	0.25	0	−0.5	0	−0.4225
	−0.5	0	0	0.1667	0.2816
	−0.25	0.5	0	0	0.8025
初始近似值	0	0	0	0	
第一次近似值	0.2	−0.3725	0.1816	0.5663	
第二次近似值	0.0480	−0.5013	0.3520	0.5399	
第三次近似值	0.0843	−0.5774	0.3295	0.4927	
第四次近似值	0.1184	−0.5577	0.3045	0.4941	
第五次近似值	0.1139	−0.5463	0.3070	0.5009	

所求的解：　$x=0.1139$　$y=-0.5463$

$z=0.3070$　$w=0.5009$

2. 试证 §2 中定理 1 及定理 2 对逐个迭代公式(1)同样成立。

解：(1)定理 1 的证明：

同 §2(3)一样，令 $\varepsilon_i^{(k)}=|x_i^{(k)}-x_i^*|$．我们有

$$
\begin{cases}
\varepsilon_1^{(k+1)} \leqslant |a_{11}|\varepsilon_1^{(k)} + |a_{12}|\varepsilon_2^{(k)} + \cdots + |a_{1n}|\varepsilon_n^{(k)} \\
\varepsilon_2^{(k+1)} \leqslant |a_{21}|\varepsilon_1^{(k+1)} + |a_{22}|\varepsilon_2^{(k)} + \cdots + |a_{2n}|\varepsilon_n^{(k)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varepsilon_n^{(k+1)} \leqslant |a_{n1}|\varepsilon_1^{(k+1)} + |a_{n2}|\varepsilon_2^{(k+1)} + \cdots + |a_{nn}|\varepsilon_n^{(k)}
\end{cases}
\qquad (*)
$$

令 $\delta_k = \max\limits_i \varepsilon_i^{(k)}$，从上面第一个方程得

$$\varepsilon_1^{(k+1)} \leqslant \mu\,\delta_k$$

因为 $\mu<1$，由第二个方程得

$$\varepsilon_2^{(k+1)} \leqslant |a_{21}|\delta_k + |a_{22}|\varepsilon_2^{(k)} + \cdots + |a_{2n}|\varepsilon_n^{(k)} \leqslant \mu\,\delta_k$$

同样可推证：

$$\varepsilon_3^{(k+1)} \leqslant \mu\,\delta_k,\ \cdots,\ \varepsilon_n^{(k+1)} \leqslant \mu\,\delta_k.$$

因此 $\delta_{k+1} \leqslant \mu\,\delta_k$，同§2 定理 1 的证明一样，$\varepsilon_i^{(k)} \to 0$，所以定理成立。

（2）定理 2 的证明：

为了方便，令 $a_j = |a_{1j}| + |a_{2j}| + \cdots + |a_{j-1,j}| + |a_{jj}|$

$$b_j = |a_{j+1,j}| + |a_{j+2,j}| + \cdots + |a_{nj}|$$

$$a_j + b_j = c_j$$

将（$*$）中各式相加，得

$$\varepsilon_1^{(k+1)} + \varepsilon_2^{(k+1)} + \cdots + \varepsilon_n^{(k+1)} \leqslant a_1\varepsilon_1^{(k)} + a_2\varepsilon_2^{(k)} + \cdots + a_n\varepsilon_n^{(k)}$$
$$+ b_1\varepsilon_1^{(k+1)} + b_2\varepsilon_2^{(k+1)} + \cdots + b_n\varepsilon_n^{(k+1)}$$

移项，由于 $a_j = c_j - b_j \leqslant c_j - c_j b_j = c_j(1-b_j) < r(1-b_j)$

我们有
$$(1-b_1)\varepsilon_1^{(k+1)} + (1-b_2)\varepsilon_2^{(k+1)} + \cdots + (1-b_n)\varepsilon_n^{(k+1)} \leqslant$$
$$\leqslant r[(1-b_1)\varepsilon_1^{(k)} + (1-b_2)\varepsilon_2^{(k)} + \cdots + (1-b_n)\varepsilon_n^{(k)}]$$

令
$$\Delta_k = (1-b_1)\varepsilon_1^{(k)} + (1-b_2)\varepsilon_2^{(k)} + \cdots + (1-b_n)\varepsilon_n^{(k)}$$

就有 $\Delta_{k+1} \leqslant r\Delta_k$，因此 $\Delta_{k+1} \leqslant r^{k+1}\Delta_0$，于是 $\Delta_{k+1} \to 0$。

因为 $0<1-b_j<1$，所以 $\varepsilon_i^{(x)} \to 0$，因此定理成立。

第三章 线性方程组

§ 1. 向量的线性相关性

1. 求下式中向量 α_1:

$$3(\alpha_1-\alpha)+2(\alpha_2+\alpha)=5(\alpha_3+\alpha)$$

其中 $\alpha_1=(2, 5, 1, 3)$，$\alpha_2=(10, 1, 5, 10)$，$\alpha_3=(4, 1, -1, 1)$。

解：设向量 $\alpha=(a_1, a_2, a_3, a_4)$根据向量的加法、减法及数积等运算法则，由，

$$3(\alpha_1-\alpha)+2(\alpha_2+\alpha)=5(\alpha_3+\alpha)$$

得 $(6-3a_1+20+2a_1,\ 15-3a_2+2+2a_2,\ 3-3a_3+10+2a_3,\ 9-3a_4+20+2a_4)$

$=(20+5a_1,\ 5+5a_2,\ -5+5a_3,\ 5+5a_4)$

因为两向量当且仅当它们的对应分量相等时才相等，由此得到：

$$26-a_1=20+5a_1,\ 17-a_2=5+5a_2,\ 13-a_3=-5+5a_3,\ 29-a_4=5+5a_4.$$

∴ $$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=4.$$

即 $$\alpha=(1, 2, 3, 4)$$

2. 假定 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是 m 个维数相同的向量，如果存在 m 个全为零的数 $k_1, \cdots, k_m$，使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$，问 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是否线性无关？如果任何不完全都是零的 m 个数 $k_1, \cdots, k_m$，使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m\neq0$，$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是否线性无关？

解：(1) m 个数 $k_1, \cdots, k_m$，全为零时，当然 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$，但不能就判定 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，

如： $$\alpha_1=(1, 0),\ \alpha_2=(-1, 0)$$

显然 $$0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2=0,$$

但 $$\alpha_1+\alpha_2=0.$$

所以 α_1 与 α_2 却是线性相关的。

(2)如果对任何不完全都是零的 m 个数 $k_1, \cdots, k_m$，都使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m\neq0$，也就是说：当且仅当 $k_1=\cdots=k_m=0$ 时，才使 $k_1\alpha_1+\cdots k_m\alpha_m=0$，则根据定义 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是线性无关的。

3. 假定 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_m$ 是同维的向量，如果 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m=0$ 成立时只有 $k_1=\cdots=k_m=0$，问 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_m$ 是否线性无关？

解：由于这里选取的 $2m$ 个数并非是任意的，虽然仅当 $k_1=\cdots=k_m=0$ 时才有

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m=0$$

但并不能判定 α_1，…，α_m，β_1，…，β_m 是线性无关，例如取 $\alpha_1=(1, 0)$，$\alpha_2=(0, 1)$，$\beta_1=(0, 0)$，$\beta_2=(0, 0)$，这里仅当 $k_1=k_2=0$ 时才有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_1\beta_1+k_2\beta_2=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0,$$

但它们却是线性相关的，因为

$$0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\beta_1+\beta_2=0$$

4. 假如 α 能够用 α_1，…，α_m 线性表示：

$$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m.$$

问这表示是否是唯一的？

解：如果又有 $\alpha=l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m$

两表示式相减得：

$$(k_1-l_1)\alpha_1+\cdots+(k_m-l_m)\alpha_m=0$$

∴当 α_1，…，α_m 是线性无关时，推得：

$$k_1=l_1,\ \cdots,\ k_m=l_m$$

即这时 α 的线性表示式是唯一的。

当 α_1，…，α_m 是线性相关时，上面等式中至少可以有一个数 (k_i-l_i) 可以不为零，这时 α 的线性表示式不是唯一的。

5. 假如 α_1，…，α_m 线性相关，β_1，…，β_m 线性相关，那就有不完全为零的数 k_1，…，k_m，使

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0,\ k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m=0$$

因此 $k_1(\alpha_1+\beta_1)+\cdots+k_m(\alpha_m+\beta_m)=0$，所以 $\alpha_1+\beta_1$，…，$\alpha_m+\beta_m$ 也线性相关。这证法是否正确？

解：这种证法不正确。由"假如 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性相关，"从定义上不能肯定有不完全为零的数 $k_1,\cdots,k_m$(对两组向量，同一组 $k_1,\cdots,k_m$)，使

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0,\ k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m=0 \qquad (A)$$

事实上有两种可能：

(1)确有完全相同的 $k_1,\cdots,k_m$ 使(A)成立，从而推得 $\alpha_1+\beta_1$，…，$\alpha_m+\beta_m$ 线性相关。

(2)若是 $k_1\alpha_1+\cdots k_m\alpha_m=0$，$\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$

其中 λ_i 与 $k_i(i=1, 2, \cdots m)$不全相同，就不能推得 $\alpha_1+\beta_1,\cdots$，$\alpha_m+\beta_m$ 也线性相关。这里举一例，如

$$\alpha_1=(1, 0, 0),\ \alpha_2=(0, 1, 0),\ \alpha_3=(0, 0, 0)$$

$$\beta_1=(0, 0, 0),\ \beta_2=(0, 1, 0),\ \beta_3=(0, 0, 1)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也线性相关。但 $\alpha_1+\beta_1=(1,0,0)$，$\alpha_2+\beta_3=(0,2,0)$，$\alpha_3+\beta_3=(0,0,1)$却线性无关。

6. 有同维的向量组(1)$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$，(2)$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_m$。问(1)无关时，(2)无关么？又(2)相关时，(1)相关么？

解：(a)当(1)无关时(2)可能线性无关，也可能线性相关，如 $\alpha_m=0$ 则显然(2)总是线性相关的。

(b)当(2)相关时(1)可能线性相关，也可能线性无关，如(1)只有一个非零向量则(1)总是线性无关。

7. 假设有两个向量组

$$\alpha_1=(a_{11}, \cdots, a_{1r}), \cdots, \qquad \alpha_m=(a_{m1}, \cdots, a_{mr})$$

$$\beta_1=(a_{11}, \cdots, a_{1r}, a_{1r+1}, \cdots, a_{1n}), \cdots, \beta_m=(a_{m1}, \cdots, a_{mr}, a_{mr+1}, \cdots, a_{mn})$$

试证：如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，那末 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 也线性无关。它们的的逆是否成立？试举例说明。

证明：(a)如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，则可证 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 也线性无关。我们用反证法：假若 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 是线性相关的，那就存在不完全都是零的数 $k_1, \cdots, k_m$，使

$$k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m=0$$

即

$$\begin{cases} k_1a_{11} + \cdots + k_ma_{m1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_1a_{1r} + \cdots + k_ma_{mr} = 0 \\ k_1a_{1r+1} + \cdots + k_ma_{mr+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_1a_{1n} + \cdots + k_ma_{mn} = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

由前 r 个等式可推得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

这和题设矛盾，所以 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 必线性无关。

(b)若 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性无关，且 $n>r$ 时，则不能推得 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 也必线性无关。如

$$\beta_1=(0,0,1),\ \beta_2=(0,1,0)$$

线性无关，但

$$\alpha_1=(0,0), \qquad \alpha_2=(0,1)$$

却线性相关。

8. 假定向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，试证 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 也线性无关。

证明：设 $$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$$

即 $$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以 $k_1+k_3=0$，$k_1+k_2=0$，$k_2+k_3=0$。由此推得 $k_1=k_2=k_3=0$，所以 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关。

9. 试证：任意线性相关向量组中任意向量是向量组中某线性无关组的线性组合。

证明：设这线性相关的向量组为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$，我们这样从中挑选一组线性无关的向量：自左至右，若 $\alpha_1 = 0$ 就不要，而 $\alpha_1 \neq 0$ 则选入；α_2 若能用 α_1 线性表示．就不要，而不能用 α_1 线性表示就选入；$\cdots$，当考虑 α_i 时，若前面已选了 k 个向量($i>k$)，则 α_i 能用这 k 个向量线性表示，就不要，而不能用这 k 个向量线性表示就选入；这样一直进行到 α_m。我们挑选到一组向量：

$$\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_l} \qquad (1 \leqslant i_1 < \cdots < i_l \leqslant m).$$

设
$$k_1\alpha_{i_1} + \cdots + k_l\alpha_{i_l} = 0$$

则 k_l 必须是零．因为不然的话有

$$\alpha_{i_l} = -\frac{k_1}{k_l}\alpha_{i_1} - \cdots - \frac{k_{l-1}}{k_l}\alpha_{i_{l-1}}$$

这和挑选的结果相矛盾，同理可得

$$k_l = k_{l-1} = \cdots = k_1 = 0$$

所以 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_l}$ 是线性无关向量组。

对于向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 中任何一个向量 α_j，若 α_j 属于前一线性无关向量组则有

$$\alpha_j = 0 \cdot \alpha_{i_1} + \cdots + 1 \cdot \alpha_j + \cdots + 0 \cdot \alpha_{i_l}$$

若 α_j 不属于这线性无关向量组，则它可被在它前面选入的那些向量线性表示，从而也可被 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_l}$ 线性表示。

10． 判别下列向量组是否线性相关？

（1） (1，1，1)，(2，2，2，2)

（2） (1，1，1)，(1，2，3)，(1，3，6)

解：（1）因为我们只在维数相同的向量之间定义它们的线性相关，线性无关而向量（1，1，1），（2，2，2，2）的维数不相同，所以不考虑它们的线性关系

（2）设
$$k_1(1,1,1) + k_2(1,2,3) + k_3(1,3,6) = 0$$

得 $\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ k_1 + 3k_2 + 6k_3 = 0 \end{cases}$ 因为系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$，

所以方程组只有零解：$k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 因此向量组线性无关。

11． 求下列各矩阵的秩：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

解：分别用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 来记矩阵中三个行向量，因为

（1） $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$

根据定理 1，α_1，α_2 线性无关，又显然有

$$3\alpha_1 - 2\alpha_2 = \alpha_3$$

所以 α_1，α_2，α_3 线性相关，根据定理 2，矩阵（1）的秩是 2。

（2）

因为 $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

根据秩的定义，矩阵（2）的秩是 5 .

12． 在秩是 r 的矩阵中，有没有等于零的 $r-1$ 阶子式？有没 有等 于零的 r 阶子式？有没有不等于零的 $r+1$ 阶子式？

解：在秩为 r 的矩阵中，有可能出现等于零的 $r-1$ 阶子式， 也有 可 能出现 等于零的 r 阶子式，但根据秩的定义，决没有不等于零的 $r+1$ 阶子式。如矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

它的秩是 2，显然有一阶子式为零，也有二阶子式为零。

13． 假如从矩阵 A 中划去一行得到的矩阵是 B，问 A、B 秩的关系怎样？

解：设矩阵 A 的秩是 r_A，矩阵 B 的秩是 r_B，而 α_1，…，α_k 是矩阵 A 中 k 个线性无关的行向量，而其余的行向量都可由它们线性表示，α 是 A 中被划去的行向量

（1）若 α 在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 中，如 $\alpha = \alpha_1$，则矩阵 A 中余下的行向量如果都可由 $\alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 线性表示，那末 $r_B = k-1$，如果不都能用 α_2，…，α_k 线性表示， 那末 $r_B = k$， 即这时 $r_A = r_B + 1$，或 $r_A = r_B$

（2）若 α 不在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 中，则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 都是 B 的行向量，所以 $r_A = r_B$.

总合上述情形，则有 $r_A = r_B$ 或 $r_A = r_B + 1$.

14． 求作一个秩是 4 的(6，5)—矩阵，它的两个行向量是（1，0，1，0，0），（1，－1，0，0，0）

解：这样的矩阵很多，只要保证有－4阶子式不是零，就可以

如
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15．试证：(m, n)—矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的秩为 0 或 1 的充要条件是有 $m+n$ 个数 $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n$ 存在，使得

$$a_{ij} = a_i b_j, \quad i = 1, \cdots, m; \quad j = 1, \cdots, n.$$

证明：“必要性”：若矩阵秩为 0，则矩阵的一切元都是零，显然可选择 $a_1 = \cdots = a_m = b_1 = \cdots = b_n = 0$；若矩阵秩是 1，根据定理 2，矩阵有 1 个列向量线性无关，而其余 $n-1$个列向量都可用它来线性表示，所以这矩阵应有如下形式

$$\begin{pmatrix} k_1 a_{1l}, & \cdots, & k_{l-1} a_{1l}, & a_{1l}, & k_{l+1} a_{1l}, & \cdots, & k_n a_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1 a_{ml}, & \cdots, & k_{l-1} a_{ml}, & a_{ml}, & k_{l+1} a_{ml}, & \cdots, & k_n a_{ml} \end{pmatrix}$$

即 $a_{ij} = a_{il} k_j$ 令 $a_{il} = a_i$，$i = 1, \cdots, m$，$b_l = 1$，$k_j = b_j$ $(j = 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n)$则就有

$$a_{ij} = a_i b_j \quad i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n$$

“充分性”：若矩阵中 $a_{ij} = a_i b_j$ $i = 1, \cdots, m$，$j = 1, \cdots, n$

则
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m b_1 & \cdots & a_m b_n \end{pmatrix}$$

矩阵的任何二阶子式都为零；若一切 a_{ij} 都是零，则它的秩是零，若有 $a_{ij} \neq 0$，则矩阵的秩是 1.

§ 2. 齐次线性方程组

解下列各齐次线性方程组：

1. $$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

解：显然第一个方程的 5 倍与第二个方程的(-2)倍之和正是第三个方程，而

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

所以系数矩阵的秩是 2，因此可用前二个方程得：

得：
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_3 = 4x_2 - 3x_4 \\ 3x_1 + 4x_3 = 6x_2 - 2x_4 \end{cases}$$

用克莱姆规则，

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4x_2 - 3x_4 & 5 \\ 6x_2 - 2x_4 & 4 \end{vmatrix} = -14x_2 - 2x_4$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4x_2 - 3x_3 \\ 3 & 6x_2 - 2x_3 \end{vmatrix} = 5x_4$$

∴ $x_1 = 2x_2 + \frac{2}{7}x_4$，$x_2 = x_2$，$x_3 = -\frac{5}{7}x_4$，$x_4 = x_4$，这就是所求的解，其中 x_2、x_4 是任意数。

2. $$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 \quad + x_5 \quad = 0 \\ x_2 \quad - x_4 \quad + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 \quad + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 \quad + x_5 \quad = 0 \\ x_1 \quad - x_4 + x_5 \quad = 0 \end{cases}$$

解：显然第二个方程与第三个方程的和正是第 5 个方程。考虑前四个方程，因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

移项就得到

$$\begin{cases} x_1 \quad = x_3 - x^5 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 \quad - x_6 = -x_5 \\ x_2 \quad = x_3 - x_5 \end{cases}$$

∴ $x_1 = x_3 - x_5$，$x_2 = x_3 - x_5$，$x_3 = x_3$，$x_4 = x_3$，$x_5 = x_5$，$x_6 = x_5$。
这就是所求的解，其中 x_3、x_5 是任意数。

§ 3. 基础解系

1. 求§2习题中各齐次线性方程组的基础解系。

解：习题1的解向量为

$$\left(2x_2+\frac{2}{7}x_4,\ x_2,\ -\frac{5}{7}x_4,\ x_4\right)=x_2(2,1,0,0)+\frac{x_4}{7}\left(2,0,-5,1\right)$$

因为(2,1,0,0)，(2,0,-5,1)线性无关所以方程组的基础解系是：

$$(2,1,0,0),\qquad \left(\frac{2}{7},\ 0,\ -\frac{5}{7},\ 1\right)$$

习题2的解向量为

$$(x_3-x_5,\ x_3-x_5,\ x_3,\ x_3,\ x_5,\ x_5)=$$

$$=x_3(1,1,1,1,0,0)+x_5(-1,-1,0,0,1,1)$$

所以方程组的基础解系是：

$$(1,1,1,1,0,0),\ (-1,-1,0,0,1,1)$$

2. 假如 α_1、α_2、α_3 是某齐次线性方程的基础解系，问 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 是不是它的基础解系？

解：因 α_1，α_2，α_3 是某齐次线性方程组的基础解系，则这三个向量线性无关。由§1习题8知，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 也线性无关，且是该方程的三个解向量。

由题设知，该方程的任何一个解向量都是 α_1，α_2，α_3 的线性组合，即有任一解向量 α：

$$\alpha=C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+C_3\alpha_3=\left(\frac{C_1}{2}+\frac{C_1}{2}\right)\alpha_1+\left(\frac{C_2}{2}+\frac{C_2}{2}\right)\alpha_2+\left(\frac{C_3}{2}+\frac{C_3}{2}\right)\alpha_3=$$

$$=\frac{1}{2}(C_1+C_2-C_3)(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{1}{2}(C_2+C_3-C_1)(\alpha_2+\alpha_3)+$$

$$+\frac{1}{2}(C_3+C_1-C_2)(\alpha_3+\alpha_1)$$

所以方程的任何一个解向量 α 也是 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 的线性组合，根据定义，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 是该齐次线性方程组的基础解系。

3. 已知矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

的各行向量都是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$$

的解向量，问这 4 个行向量能否构成基础解系，假如不能，这 4 个行向量是多了还是少了？假如多了，如何去掉？假如少了，又如何补充？

解：显然方程组中若用(1)(2)(3)(4)依次表示各方程，则它们之间有下列关系：

$$(2)=3(1)-(3),\quad (4)=5(1)-(3)$$

而

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

因此要求解线性方程组，只要求解

$$\begin{cases} x_1+x_2=-x_3-x_4-x_5 \\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5 \end{cases}$$

得 $x_1=x_3+x_4+5x_5$，$x_2=-2x_3-2x_4-6x_5$，$x_3=x_3$

$x_4=x_4$　$x_5=x_5$

方程组有一基础解系：
它包含三个解向量

$\beta_1=(1,-2,1,0,0)$，$\beta_2=(1,-2,0,1,0)$，$\beta_3=(5,-6,0,0,1)$

若分别用 α_1，α_2，α_3 表示矩阵的行向量，显然有：

$$\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2,\quad \alpha_4=3\alpha_1-2\alpha_2$$

所以由矩阵的 4 个行向量中线性无关的顶多只有二个，因此不能构成基础解系，因为 $\alpha_1=\beta_1$，$\alpha_2=\beta_2$，用它的前二个行向量，再添上 β_3 就构成基础解系。

4．假设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+x_{1n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

的解都是 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解，试证：

$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是 $\alpha_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}),\cdots$

$\alpha_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$的线性组合。

解：根据题设，两齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0 \end{cases}$$

有完全相同的解、所以它们基础解系所包含向量的个数完全相同，从而这两个齐次线性方程组系数矩阵的秩完全相同。由此得出两系数矩阵行向量的最大无关组的向量的个数相同。设 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_k}$，$(1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant m)$ 是第一个系数矩阵行向量中的一个最大无关组，则根据上面推断，它也应是第二个系数矩阵行向量的一个最大无关组，所以向量 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 可由 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_k}$ 线性表示，即向量 β 是 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的线性组合

§ 4. 非齐次线性方程组

1. 求解下列线性方程组：

（1）
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 11x_1 - 12x_2 + 17x_3 = 3 \end{cases}$$

解：方程组的系数矩阵，增广矩阵分别是

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 11 & -12 & 17 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ 11 & -12 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

$\because$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 11 & -12 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 9 & 1 & 4 \\ 45 & 5 & 17 \end{vmatrix} = 0,$$

而 B 中的三阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 11 & -12 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -5 & 2 \\ 5 & -15 & 3 \end{vmatrix} = 70 \neq 0$$

因此 A 和 B 的秩不相同，所以方程组无解。

（2）
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 8 \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 16 \end{cases}$$

解：显然第一个方程的 2 倍与第二个方程的和正是第三个方程，而

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

解第一、二两个方程

$$\begin{cases} x_1+x_3=4-2x_2+x_4 \\ 3x_1-x_3=8-6x_2+3x_4 \end{cases}$$

得 $x_1=3-2x_2+x_4$，$x_2=x_2$，$x_3=1$，$x_4=x_4$ 这就是方程组的解，其中 x_2、x_4 是任意数。

2．求线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda \\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3 \end{cases}$$

有解、无解、有唯一解时，λ 所取的值。

解：线性方程组的系数矩阵与增广矩阵分别是

$$A=\begin{pmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 1 & \lambda \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ 2\lambda+3 & \lambda & 3 \\ 3\lambda+3 & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ 2\lambda+3 & \lambda & 3 \\ \lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 2 \\ 2\lambda & \lambda & 3 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)$$

（1）$\lambda=0$ 时

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\text{秩是 }2,\qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\text{秩是 }3$$

这时方程组无解。

（2）$\lambda=1$ 时

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}\text{秩是 }2,\qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\text{秩是 }2$$

这时方程组有无穷多组解。

（3）$\lambda\neq0$，$\lambda\neq1$ 时，因 $|A|\neq0$，所以 A、B 秩都是 3，方程组有唯一解。

3．假设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

系数矩阵的秩等于矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

的秩，试证这个方程组有解。

解：记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$

显然矩阵 A 的秩 $\leqslant$ 矩阵 B 的秩 $\leqslant$ 矩阵 C 的秩，根据题设矩阵 A 的秩 = 矩阵 C 的秩，因此，矩阵 A 的秩 = 矩阵 B 的秩，所以方程组有解。

4． 试证方程组

$$x_1-x_2=a_1,\ x_2-x_3=a_2,\ x_3-x_4=a_3,\ x_4-x_5=a_4,\ x_5-x_1=a_5$$

有解的充要条件是 $\sum_{i=1}^{5} a_i=0$，并且在有解情形下，求出它的一般解。

证明：方程组的系数矩阵与增广矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix}$$

“充分性”，若 $\sum_{i=1}^{5} a_i=0$，则矩阵 A、B 的第五个行向量正是前四个行向量之和的（-1）倍，而 A、B 的秩都是 4，所以方程组有解，它的解可以从前四个方程解出：

$$x_5=x_5,\qquad x_4=x_5+a_4\qquad x_3=x_5+a_3+a_4$$

$$x_2=x_5+a_2+a_3+a_4,\quad x_1=x_5+a_1+a_2+a_3+a_4,$$

其中 x_5 是任意数。

“必要性”：若方程组有解、则 A、B 应该有相同的秩，因为矩阵 A 的前四个行向量线性无关，第五个行向量正是前四个行向量之和的（-1）倍，所以 A 的秩是 4 、于是矩阵 B 的

秩也是 4，因此它的第五个行向量可由前四个线性表示，由此推得

$$\alpha_5 = -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) \quad 或 \quad \sum_{i=1}^{5} \alpha_i = 0$$

5° 假如 $\gamma_1, \cdots, \gamma_t$ 是(1)的解向量，问 $\gamma_1, \cdots, \gamma_t$ 的任意线性组合是否都是(1)的解向量，假如不是，其中哪些是(1)的解向量？

解：假定 $\gamma_i=(C_{i1}, \cdots, C_{in})$ 则 $\gamma_1, \cdots, \nu_t$ 的任意线性组合可写为：

$$k_1\gamma_1+\cdots+k_t\gamma_t=\left(\sum_{l=1}^{t} k_lC_{l1}, \cdots, \sum_{l=1}^{t} k_lC_{ln}\right)$$

其中 $k_1, \cdots, k_t$ 是任意数。又因为 $\gamma_1, \cdots, \gamma_t$ 是方程组(1)的解向量，所以有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{lj}=b_i.$$

若要使 $k_1\gamma_1+\cdots+k_t\gamma_t$ 是(1)的解向量，必须满足

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{l=1}^{t} k_lC_{lj}\right)=\sum_{l=1}^{t} k_l\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{lj}\right)$$

$$=\sum_{l=1}^{t} k_lb_i=b_i\sum_{l=1}^{t} k_l=b_i, i=1, 2, \cdots, m$$

所以当 $k_1+k_2+\cdots+k_t=1$ 时，则 $k_1\gamma_1+\cdots+k_t\gamma_t$ 是(1)的解向量当 $k_1+k_2+\cdots+k_k\neq 1$ 时，则 $k_1\gamma_1+\cdots+k_k\gamma_k$ 不是(1)的解向量。

§ 5. 初 等 变 换

1. 试用初等变换计算下列矩阵的秩：

(1) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$

解：$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

所以矩阵的秩是3.

(2) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$

解:

$$\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -67 & 35 & 0 & 155 \\ 3 & 98 & 23 & 0 & 86 \\ 15 & -428 & 1 & 0 & 52 \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 4 & -67 & 35 & 0 & 155 \\ 1 & 98 & 23 & 0 & 86 \\ 5 & -428 & 1 & 0 & 52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -459 & -57 & 0 & -189 \\ 1 & 98 & 23 & 0 & 86 \\ 0 & -918 & -114 & 0 & -378 \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 0 & 459 & 57 & 0 & 189 \\ 1 & 98 & 23 & 0 & 86 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵的秩是 2。

2. 只用行初等变换或列初等变换能否求出矩阵的秩？能否解线性方程组？

解：用行初等变换求矩阵的秩的原理同样可推出单用列初等变换求矩阵的秩。但在解线性方程组时只能单用行初等变换，如果用列初等变换会把方程组的未知量搞乱，所以不能用来解线性方程组。

3. 试用初等变换解下列各方程组：

（1）$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

解：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

推得 $x_2 = \frac{1}{3}(4 - 2x_3 - 3x_4)$，$x_1 = 1 + x_2 - x_3 - x_4$，所以方程组的解是：

$$x_1 = \frac{1}{3}(7 - 5x_3 - 6x_4) \qquad x_2 = \frac{1}{3}(4 - 2x_3 - 3x_4),$$

$$x_3 = x_3, \quad x_4 = x_4.$$

（2）$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 = -3 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_2 - 9x_3 - 5x_4 = -21 \end{cases}$

解：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & -9 & -5 & -21 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 13 \\ 0 & -4 & -12 & -6 & -26 \end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix}1&2&3&1&5\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{13}{6}\\0&0&0&0&0\\0&1&3&\frac{3}{2}&\frac{13}{2}\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&2&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{13}{6}\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以方程组解

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_4-\frac{3}{2}\\x_2=0\\x_3=\frac{13}{6}-\frac{1}{2}x_4\\x_4=x_4\end{cases}$$

4． 假设(m, n)—矩阵 A 经过行初等变换化为矩阵 B，A 的列向量分别用 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 表示，B 的列向量分别用 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 表示。试证如果

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0 \qquad (*)$$

那末

$$k_1\beta_1+\cdots+k_n\beta_n=0 \qquad (**)$$

反过来，如果(**)成立，那末(*)也成立。

证明：设 $\alpha_i=(a_{1i}, \cdots, a_{mi}) \quad (i=1, 2, \cdots, n)$

如果

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$$

则

$$k_1a_{j1}+\cdots+k_na_{jn}=0, \ (j=1, 2, \cdots m) \qquad (***)$$

(1)互换 A 的两行，这时关系式(***)没变，只是改变了它们的次序。

(2)用一个不为零的数乘 A 的一行。

$$k_1(ma_{l1})+\cdots+k_n(ma_{ln})=m[k_1a_{l1}+\cdots+k_na_{ln}]=0$$

(3)用一个数乘 A 的一行加到另一行上，

$$k_1(a_{l1}+ma_{s1})+\cdots+k_n(a_{ln}+ma_{sn})$$

$$=(k_1a_{l1}+\cdots+k_na_{ln})+m(k_1a_{s1}+\cdots+k_na_{sn})=0$$

这说明矩阵 A 经过行初等变换，不改变它的列向量的各分量之间的线性关系，从而也就不改变列向量之间的线性关系，所以，若 B 是 A 经过行初等变换化成的，则 B 的列向量仍有

$$k_1\beta_1+\cdots+k_n\beta_n=0$$

反之，若 B 的列向量之间有关系式(**)，而 B 是 A 经过行初等变换化成的，因为 A 也可以由 B 经过行初等变换得到，根据前面的论证，则 A 的行向量之间也有关系式(*)。

第四章 矩阵运算

§1. 矩阵的加法、乘法

1. 计算：

（1） $3\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 10 & 20 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

解：

$$3\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 10 & 20 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 21 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 10 & 20 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（2） $(x\ y\ z)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

解：

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + b_1z \\ a_{12}x + a_{22}y + b_2z \\ b_1x + b_2y + cz \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x^2 + a_{12}xy + b_1xz + a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_2yz + b_1xz + b_2yz + cz^2$$

$$= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + cz^2 + 2a_{12}xy + 2b_1xz + 2b_2yz.$$

（3） $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}^2$

解：

$$\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 a - \sin^2 a & -\sin a \cos a - \sin a \cos a \\ \sin a \cos a + \sin a \cos a & -\sin^2 a + \cos^2 a \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos 2a & -\sin 2a \\ \sin 2a & \cos 2a \end{pmatrix}.$$

（4） $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^3$

解：

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

2． 利用等式

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

计算

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$$

解：

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5=\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^3$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^3$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^3$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^3$$

$$=\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}-7&3\\5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}-7&3\\5&-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&3\\5&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&3\\5&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^5\begin{pmatrix}-7&3\\5&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32&\\&243\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&3\\5&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3197&-1266\\7385&-2922\end{pmatrix}$$

3． 矩阵与行列式主要有哪些不同之处？

答：行列式是一个数，所以任意两个行列式可以任意作加、减、乘、除（分母不为零）等运算，行列式的行数与列数必须相同。一个（m，n）—矩阵是由 mn 个元排成 m 行 n 列的一个表。它的行数 m 与列数 n 可以不相同；矩阵的相等是指同型矩阵且对应元都相等，矩阵的运算对阶数有一定要求，方法也不与行列式的完全一致。

§ 2． 对角形矩阵、对称矩阵、正交矩阵

1． 假如 A、P 都是 n 阶矩阵，P 的 n 个行向量写成 Y_1，…，Y_n，即

$$P=\begin{pmatrix}Y_1\\\vdots\\Y_n\end{pmatrix}$$

求证：

$$PA=\begin{pmatrix}Y_1A\\\vdots\\Y_nA\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}a_1Y_1\\\vdots\\a_nY_n\end{pmatrix}.$$

证明：设

$$P=\begin{pmatrix}y_{11}\cdots y_{1n}\\\cdots\cdots\cdots\\y_{n1}\cdots y_{nn}\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$PA=\begin{pmatrix}y_{11}\cdots y_{1n}\\\cdots\cdots\cdots\\y_{n1}\cdots y_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{n} y_{1l}a_{l1}\cdots \sum_{l=1}^{n} y_{1l}a_{ln} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{l=1}^{n} y_{nl}a_{l1}\cdots \sum_{l=1}^{n} y_{nl}a_{ln} \end{pmatrix}$$

而
$$Y_kA=(y_{k1}\cdots y_{kn})\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}=\left(\sum_{l=1}^{n} y_{kl}a_{l1}\cdots \sum_{l=1}^{n} y_{kl}a_{ln}\right)$$

所以解

$$PA=\begin{pmatrix} Y_1A \\ \vdots \\ Y_nA \end{pmatrix}$$

又

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}P=\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{11}\cdots y_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{n1}\cdots y_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1y_{11}\cdots a_1y_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_ny_{n1}\cdots a_ny_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1Y_1 \\ \vdots \\ a_nY_n \end{pmatrix}.$$

2． 试证

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵。

证明： 记

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

因为

$$AA'=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A'A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

所以 A 是正交矩阵。

3． 假如 A 是实对称矩阵，如果 $A^2=0$，那末 $A=0$。

证明：

设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\cdots a_{2n}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}&a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}\qquad a_{ij}=a_{ji}\quad i、j=1,2,\cdots,n.$$

因为

$$A^2=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\cdots a_{2n}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}&a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\cdots a_{2n}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}&a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sum_{l=1}^{n}a_{1l}^2&\sum_{l=1}^{n}a_{1l}a_{l2}\cdots&\sum_{l=1}^{n}a_{1l}a_{ln}\\\sum_{l=1}^{n}a_{2l}a_{l1}&\sum_{l=1}^{n}a_{2l}^2&\cdots\sum_{l=1}^{n}a_{2l}a_{ln}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\\sum_{l=1}^{n}a_{nl}a_{l1}&\sum_{l=1}^{n}a_{nl}a_{l2}\cdots&\sum_{l=1}^{n}a_{nl}^2\end{pmatrix}=0$$

所以 $\sum_{l=1}^{n}a_{kl}^2=0$，但 A 是实对称矩阵，由此推出：

$$a_{k1}=a_{k2}=\cdots=a_{kn}=0\qquad k=1,2,\cdots,n$$

于是 $A=0$。

4． 假定矩阵 $A_1,\cdots,A_m$ 的乘积 $A_1\cdots A_m$ 存在，试证

$$(A_1A_2\cdots A_m)'=A_m'\cdots A_2'A_1'$$

证明：当 $k=2$ 时，$(A_1A_2)'=A_2'A_1'$

设当 $k=l$ 时等式也成立，也就是

$$(A_1A_2\cdots A_l)'=A_l'\cdots A_2'A_1'$$

则当 $k=l+1$ 时，有

$$(A_1\cdots A_lA_{l+1})'=[(A_1\cdots A_l)A_{l+1}]'=A'_{l+1}(A_1\cdots A_l)'=A'_{l+1}A_l'\cdots A_1'$$

即只要 $A_1\cdots A_m$ 存在，恒有等式

$$(A_1A_2\cdots A_m)'=A_m'\cdots A_2'A_1'$$

5. 假设 A 为对角形矩阵，它的主对角线上元互不相等，试证与 A 相乘为可交换的矩阵只是对角形矩阵。

证明：设

$$A=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$AB=BA$，即

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

或：

$$\begin{pmatrix} d_1a_{11} & \cdots & d_1a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_na_{n1} & \cdots & d_na_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1a_{11} & \cdots & d_na_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_1a_{n1} & \cdots & d_na_{nn} \end{pmatrix}$$

由此推得

$$d_ia_{ij}=d_ja_{ij}\ \text{或}\ (d_i-d_j)a_{ij}=0,\qquad i,j=1,2,3,\cdots,n$$

因为 $d_i\neq d_j$，$i\neq j$，所以 $a_{ij}=0$，$i\neq j$，于是

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

6. 试证与任意 n 阶矩阵相乘为可换的 n 阶矩阵是数量矩阵。

证明：设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

与任意 n 阶矩阵相乘为可换的 n 阶矩阵，E_{ij} 是第 i 行、第 j 列的元为 1，其余的元都是零的矩阵。因为

$$AE_{ij}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}(i)=\begin{pmatrix} & a_{1i} & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ & a_{ni} & \end{pmatrix}(i)$$

（上方标注第 (j) 列）

$$E_{ij}A=(i)\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \vdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & \vdots & \end{pmatrix}(i)$$

（上方标注第 (j) 列）

所以由 $AE_{ij}=E_{ij}A$，得 $a_{ii}=a_{jj}$，并且，当 $j\neq i$ 时，$a_{ij}=0$，因此：

$$A=\begin{pmatrix} d & & \\ & \ddots & \\ & & d\end{pmatrix}$$

是数量矩阵。

7． 假如 A 是反对称矩阵，B 是对称矩阵，试证

（1） A^2 是对称矩阵；

（2） $AB-BA$ 是对称矩阵；

（3） AB 是反对称矩阵的充要条件是 $AB=BA$。

证明：（1）因为 $A=-A'$，所以

$$A^2=(-A')(-A')=A'A'=(A^2)'$$

即 A^2 是对称矩阵。

（2）由 $A=-A'$，$B=B'$，得

$$(AB-BA)'=(AB)'-(BA)'=B'A'-A'B'$$

$$=B(-A)-(-A)B=-BA+AB=AB-BA$$

所以 $AB-BA$ 是对称矩阵

（3）充分性：若 $AB=BA$、$B=B'$、$A'=-A$，则

$$(AB)'=B'A'=B(-A)=-BA=-AB$$

所以 AB 是反对称矩阵

必要性：由 $(AB)'=-AB$、$B=B'$、$A'=-A$，则

$$(AB)'=B'A'=B(-A)=-BA$$

因此 $$-BA=-AB$$

所以 $$BA=AB$$

§ 3. 逆 矩 阵

1. 求下列各矩阵的逆矩阵：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

解：

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cong \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

所以逆矩阵是

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

（2）$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

解：因为

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{11} = \cos\alpha、A_{12} = -\sin\alpha$$

$$A_{12} = \sin\alpha、A_{22} = \cos\alpha$$

所以逆矩阵是

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

解：

$$
\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\cong\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\cong\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\cong\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\cong\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\cong\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\cong\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}
\end{array}\right)
$$

所以逆矩阵是

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

（4） $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

解：

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 0 & 0 & & 1 & & \\ 3 & 7 & 2 & 3 & & & 1 & \\ 2 & 5 & 1 & 2 & & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\cong\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\cong\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\cong\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\cong\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

所求逆矩阵是

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. 设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $a_i \neq 0$, $i=1,\cdots,n$, 求 A^{-1}。

解:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_{n-1}} \end{pmatrix}$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} & & & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{a_{n-1}} & \end{pmatrix}$$

3. 设

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

试计算 $(A+2E)^{-1}(A^2-4E)$ 及 $(A+2E)^{-1}(A-2E)$

解：

$$(A+2E)^{-1}(A^2-4E)=(A+2E)^{-1}=A-2E$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

又因为

$$A+2E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & & \\ 1 & 1 & 0 & & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & & & 1 \end{array}\right)\cong\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & & & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & & -1 & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

所以

$$(A+2E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

因此

$$(A+2E)^{-1}(A-2E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

4. 设

$$X=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix},$$

并且 A、B 都是满秩矩阵，求 A^{-1}.

解：设

$$X^{-1}=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

所以

$$XX^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AX_3 & AX_4 \\ BX_1 & BX_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

即 $AX_3=E$, $AX_4=0$, $BX_1=0$, $BX_2=E$,

但 A、B 是满秩矩阵，所以

$$X_1=0、X_4=0、X_3=A^{-1}、X_2=B^{-1}$$

因此

$$X^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

5. 证明 $E'_i(a)=E_i(a)$, $E'_{ij}(a)=E_{ji}(a)$, $(E_i(a))^{-1}=E_i(a^{-1})$, $(E_{ij}(a))^{-1}=E_{ij}(-a)$。这就是说初等矩阵的转置矩阵是初等矩阵，初等矩阵的逆矩阵也是初等矩阵。

证明：

$$E_i(a)=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}(i),\quad E'_i(a)=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}(i)=E_i(a)$$

（上方列标记为 (i)）

又

$$E_i(a)E_i(a^{-1})=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{a} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}(i)=E$$

$$E_i(a^{-1})E_i(a)=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{a} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}=E$$

所以 $(E_i(a))^{-1}=E_i(a^{-1})$

再因为

$$E_{ij}(a)=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & a & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ (j)\\ \\ \\ \end{matrix}$$

(上方列标 (i))

$$E'_{ij}(a)=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & a & \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ (i)\\ \\ (j)\\ \\ \\ \end{matrix}=E_{ji}(a)$$

(上方列标 (i) (j))

$$E_{ij}(a)E_{ij}(-a)=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & a & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & (-a) & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ (j)\\ \\ \\ \end{matrix}=E$$

$$E_{ij}(-a)E_{ij}(a)=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & (-a) & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & a & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ (j)\\ \\ \\ \end{matrix}=E$$

所以 $(E_{ij}(a))^{-1}=E_{ij}(-a)$。

6． 只利用列初等变换能否求逆矩阵？ 能否既用行初等变换又用列初等变换来求逆矩阵？

解：只用列初等变换可以求逆矩阵，只要把 E 放在 A 的下边，用列初等变换把 A 化化成 E，同时也就把下边的 E 化成了 A^{-1}。

但既用行初等变换，又用列初等变换不能用来求逆矩阵。

第五章 二 次 齐 式

§ 1. 一般二次齐式的标准形

1. 下列两式是否是二次齐式：

(1) $x^2+2y^2+2xy+6yz+3$

(2) $2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3=0$

解：(1)不是。因为式中有常数项。

(2)不是。这是一个方程。

2. 假如 $X=PY$ 是降秩线性变换，定理 1 的结论是否仍然成立？

解：不能。此时 B 的秩不一定与 A 的秩相等，以例 2 中的二次型为例：这时

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\end{pmatrix},\ 设 P=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&-1&-1\\2&0&2\end{pmatrix},$$

$$B=P'AP=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-1&0\\3&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&3\\1&-1&-1\\2&0&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6&8&10\\8&-2&4\\10&4&18\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-3&4&5\\4&-1&2\\5&2&9\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}13&0&13\\4&-1&2\\13&0&13\end{pmatrix}$$

显然 B 的秩是 2，但 A 的秩是 3，两者不相等。

3. 能否用行初等变换求 P？

解：可以。因为 $P'=E'_mE'_{m-1}\cdots E'_1E$，求时将 E 放在 A 的右边，当用行初等变化把 A 化为对角矩阵时，右边的 E 就化成 P' 了，有了 P' 我们也就得到 P. 以教材156 页中矩阵为例：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&-3&0&1&0\\1&-3&0&0&0&1\end{array}\right)\cong\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&1&-2&1&1&0\\1&0&-3&0&1&0\\-2&-3&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\cong\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&0&-2&1&1&0\\0&-\frac{1}{2}&-2&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-2&-2&0&0&0&1\end{array}\right)\cong\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&0&0&1&1&0\\0&-\frac{1}{2}&-2&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-2&-2&1&1&1\end{array}\right)$$

$$\cong\left(\begin{array}{ccc:ccc}2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 6 & 3 & -1 & 1\end{array}\right)\cong\left(\begin{array}{ccc:ccc}2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 3 & -1 & 0\end{array}\right)$$

所以
$$P'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}，\text{即 } P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

4. 用配平方法把下列二次齐式化为标准形，并求所用的线性变换。

（1） $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+5x_1x_2-3x_2x_3$

（2） $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$

（3） $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4$

解：（1） $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+5x_1x_2-3x_2x_3$

$$=x_1^2+5x_1x_2+\frac{25}{4}x_2^2-\frac{25}{4}x_2^2-3x_2x_3$$

$$=\left(x_1+\frac{5}{2}x_2\right)^2-\frac{25}{4}x_2^2-3x_2x_3-\frac{9}{25}x_3^2+\frac{9}{25}x_3^2$$

$$=\left(x_1+\frac{5}{2}x_2\right)^2-\left(\frac{5}{2}x_2+\frac{3}{5}x_3\right)^2+\frac{9}{25}x_3^2$$

$$=y_1^2-y_2^2+\frac{9}{25}y_3^2$$

其中
$$\begin{cases}y_1=x_1+\frac{5}{2}x_2\\ y_2=\frac{5}{2}x_2+\frac{3}{5}x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$$

（2） $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$

$$=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$$

$$+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2^2-\frac{4}{3}x_2x_3+\frac{4}{9}x_3^2\right)-\frac{4}{3}x_3^2+3x_3^2$$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_3^2$$

$$=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2$$

其中
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - \dfrac{2}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

（3） $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$

令 $x_1 = y_1 + y_2$， $x_2 = y_1 - y_2$， $x_3 = y_3 + y_4$， $x_4 = y_3 - y_4$

得
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)(y_3 + y_4) + (y_3 + y_4)(y_3 - y_4)$$
$$= [y_1^2 + y_1(y_3 + y_4)] - [y_2 + y_2(y_3 + y_4)] + y_3^2 - y_4^2$$
$$= \left[y_1 + \frac{1}{2}(y_3 + y_4) \right]^2 - \left[y_2 + \frac{1}{2}(y_3 + y_4) \right]^2 + y_3^2 - y_4^2$$
$$= z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2$$

其中

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \dfrac{y_3 + y_4}{2} \\ z_2 = y_2 + \dfrac{y_3 + y_4}{2} \\ z_3 = y_3 \\ z_4 = y_4 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3) \\ z_2 = \dfrac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3) \\ z_3 = \dfrac{1}{2}(x_3 + x_4) \\ z_4 = \dfrac{1}{2}(x_3 - x_4) \end{cases}$$

5． 用初等变换求上题中各二次齐式的标准形，并求所用的变换的矩阵。

解：（1）
$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{25}{4} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ \hline 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{25}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{25} \\ \hline 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{25} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(2)
$$\left(\begin{array}{ccc} 2&2&-2\\ 2&5&-4\\ -2&-4&5\\ \hline 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{array}\right)\cong\left(\begin{array}{ccc} 2&0&0\\ 0&3&-2\\ 0&-2&3\\ \hline 1&-1&1\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{array}\right)\cong\left(\begin{array}{ccc} 2&0&0\\ 0&3&0\\ 0&0&\frac{5}{3}\\ \hline 1&-1&\frac{1}{3}\\ 0&1&\frac{2}{3}\\ 0&0&1\end{array}\right)$$

(3)
$$\left(\begin{array}{cccc} 0&\frac12&0&0\\ \frac12&0&\frac12&0\\ 0&\frac12&0&\frac12\\ 0&0&\frac12&0\\ \hline 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{array}\right)\cong\left(\begin{array}{cccc} 1&\frac12&\frac12&0\\ \frac12&0&\frac12&0\\ \frac12&\frac12&0&\frac12\\ 0&0&\frac12&0\\ \hline 1&0&0&0\\ 1&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{array}\right)\cong\left(\begin{array}{cccc} 1&0&\frac12&0\\ 0&\frac12&\frac14&0\\ \frac12&\frac14&0&\frac12\\ 0&0&\frac12&0\\ \hline 1&-\frac12&0&0\\ 1&\frac12&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\cong\left(\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&-\frac12&\frac14&0\\ 0&\frac14&-\frac14&\frac12\\ 0&0&\frac12&0\\ \hline 1&-\frac12&-\frac12&0\\ 1&\frac12&-\frac12&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{array}\right)\cong\left(\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&-\frac12&0&0\\ 0&0&-\frac18&\frac12\\ 0&0&\frac12&0\\ \hline 1&-\frac12&-\frac34&0\\ 1&\frac12&-\frac14&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{array}\right)\cong\left(\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&-\frac12&0&0\\ 0&0&-\frac18&0\\ 0&0&0&2\\ \hline 1&-\frac12&-\frac34&-3\\ 1&\frac12&-\frac14&-1\\ 0&0&1&4\\ 0&0&0&1\end{array}\right)$$

6. 假如 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ 的秩是 $n-1$，并且 $a_{ij}=a_{ji}$，$A_{nn}\neq 0$，试求使 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ $=\sum\limits_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}y_iy_j$ 的满秩线性变换。

解：因为 (a_{ij}) 的秩是 $n-1$，$A_{nn}\neq 0$，所以我们有

$$a_{in}=k_1a_{i1}+\cdots+k_{n-1}a_{i,n-1},\quad (i=1,2,\cdots n) \tag{1}$$

于是根据计算我们有

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1,n-1}x_{n-1}+a_{1n}x_n)x_1+\cdots$$
$$+(a_{n-1,1}x_1+\cdots+a_{n-1,n-1}x_{n-1}+a_{n-1,n}x_n)x_{n-1}$$
$$+(a_{n,1}x_1+\cdots+a_{n,n-1}x_{n-1}+a_nx_n)x_n$$
$$=[a_{11}x_1+\cdots+a_{1,n-1}x_{n-1}+(k_1a_{11}+\cdots+k_{n-1}a_{1,n-1})x_n]x_1+\cdots$$
$$+[a_{n-1,1}x_1+\cdots+a_{n-1,n-1}x_{n-1}+(k_1a_{n-1,1}+\cdots+k_{n-1}a_{n-1,n-1})x_n]x_{n-1}$$
$$+[a_{n1}x_1+\cdots+a_{n,n-1}x_{n-1}+(k_1a_{n,1}+\cdots+k_{n-1}a_{n-1,n})x_n]x_n$$
$$=[a_{11}(x_1+k_1x_n)+\cdots+a_{1,n-1}(x_{n-1}+k_{n-1}x_n)]x_1+\cdots$$
$$+[a_{n-1,1}(x_1+k_1x_n)+\cdots+a_{n-1,n-1}(x_{n-1}+k_{n-1}x_n)]x_{n-1}$$
$$+[a_{n1}(x_1+k_1x_n)+\cdots+a_{n,n-1}(x_{n-1}+k_{n-1}x_n)]x_n$$

令 $\quad x'_1=x_1+k_1x_n,\ x'_2=x_2+k_2x_n,\cdots,x'_{n-1}=x_{n-1}+k_{n-1}x_n,\ x'_n=x_n$

则 $\quad x_1=x'_1-k_1x'_n,\ x_2=x'_2-k_2x'_n,\cdots,x_{n-1}=x'_{n-1}-k_{n-1}x'_n$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=(a_{11}x'_1+\cdots+a_{1,n-1}x'_{n-1})(x'_1-k_1x'_n)+\cdots$$
$$+(a_{n-1,1}x'_1+\cdots+a_{n-1,n-1}x'_{n-1})(x'_{n-1}-k_{n-1}x'_n)$$
$$+(a_{n1}x'_1+\cdots+a_{n,n-1}x'_{n-1})x'_n$$
$$=(a_{11}x'_1+\cdots+a_{1,n-1}x'_{n-1})x'_1-(a_{11}x'_1+\cdots+a_{1,n-1}x'_{n-1})k_1x'_n+\cdots$$
$$+(a_{n-1,1}x'_1+\cdots+a_{n-1,n-1}x'_{n-1})x'_{n-1}-(a_{n-1,1}x'_1+\cdots+a_{n-1,n-1}x'_{n-1})k_{n-1}x'_n$$
$$+(a_{n1}x'_1+\cdots+a_{n,n-1}x'_{n-1})x'_n$$

根据 $a_{ij}=a_{ji}$，及前面的(1)，上面 x'_n 的系数是零，所以

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=(a_{11}x'_1+\cdots+a_{1,n-1}x'_{n-1})x'_1+\cdots$$
$$+(a_{n-1,1}x'_1+\cdots+a_{n-1,n-1}x'_{n-1})x'_{n-1}$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}x'_ix'_j$$

这里 $x'_1=x_1+k_1x_n,\cdots,x'_{n-1}=x_{n-1}+k_{n-1}x_n,\ x'_n=x_n$

§ 2. 实二次齐式的分类

1. 假如把任意 $x_1 \neq 0, \cdots, x_n \neq 0$ 代入二次齐式 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 都使 $f > 0$，问 f 是否正定的？

解：不一定。例如

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 0 \cdot x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

对任意 $x_1 \neq 0, \cdots x_4 \neq 0$ $f(x_1, x_2, x_3, x_4) > 0$ 但对 $x_1 = 0$，$x_2 = 1$，$x_3 = 0$，$x_4 = 0$，则 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$，不符合正定定义。

2. 判别下列二次齐式是否正定的，是否负定的？

（1） $f = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

（2） $f = x_1^2 + x_2^2 + 14x_3^2 + 7x_4^2 + 6x_1x_3 + 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4$

解：（1） $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$,

$$a_{11} = -5 < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -80 < 0$$

所以 f 是负定的

（2） $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 14 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$,

$$a_{11} = 1 > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 14 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 14 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -2<0$$

所以，f 是不定的。

3． 求 λ 的值，使二次齐式

$$f(x,y,z,w)=\lambda(x^2+y^2+z^2)+2xy-2yz+2zx+w^2$$

是正定的，并讨论 $\lambda\leqslant 2$ 时的情况。

解：在 $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

中令

$$\lambda>0,\quad \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-1>0,\quad \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2>0.$$

得 $\lambda>2$。此时 f 是正定的。当 $\lambda\leqslant 2$ 时，三阶主子式

$$(\lambda-2)(\lambda+1)^2\leqslant 0,\quad |A|=(\lambda-2)(\lambda+1)^2\leqslant 0,$$

所以二次齐式 f 不定。

4． 如果实二次齐式 $\sum a_{ij}x_ix_j$ 的正，负惯性指数是 k, l；$a_1,\cdots,a_k$ 是任意 k 个正数，$b_1,\cdots,b_l$ 是任意 l 个负数。那末，这二次齐式可以化成

$$a_1y_1^2+\cdots+a_ky_k^2+b_1y_{k+1}^2+\cdots+b_ly_{k+l}^2.$$

解：$\sum a_{ij}x_ix_j$ 可经满秩线性变换化为标准形

$$f=y_1^2+\cdots+y_k^2-y_{k+1}^2-\cdots-y_{k+l}^2$$

再作满秩线性变换：

$$y_1=\sqrt{a_1}\,z_1,\cdots,y_k=\sqrt{a_k}z_k,$$

$$y_{k+1}=\sqrt{-b_k}z_k,\cdots y_{k+l}=\sqrt{-b_l}\,z_{k+l},\cdots$$

$$y_{k+l+1}=z_{k+l+1},\cdots,y_n=z_n.$$

则
$$f=a_1z_1^2+a_2z_2^2+\cdots+a_kz_k^2+b_1z_{k+1}^2+\cdots+b_lz_{k+l}^2$$

5． 证明实二次齐式的秩 r 与符号差 $s=p-l$ 同是奇数或同是偶数，并且 $|s|\leqslant r$。

证明：因为 $r=p+l$，$s=p-l$，所以 $r+s=2p$，即 $r+s$ 是偶数．因此 r 与 s 的奇偶

性相同。

又因为 $p>0$，$l>0$，所以

$$|s|=|p-l|\leqslant p+l=r$$

6．设实对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 是正定的，$b_1\cdots b_n$ 是任意 n 个非零的实数，那末 $B=(a_{ij}b_ib_j)$ 也是正定的。

证明： $B=\begin{pmatrix} a_{11}b_1b_1\cdots a_{1n}b_1b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}b_nb_1\cdots a_{nn}b_nb_n \end{pmatrix}$，

根据行列式性质 1，我们容易得知 B 中左上角各主子式 $|B_i|=b_1^2\cdots b_i^2|A_i|$ 但 A 正定，故 A 中左上角各主子式 $|A_i|>0$。因此 $|B_i|>0$，所以 B 正定。

7．试证矩阵 (a_{ij}) 如果是正定的，那末 $a_{ii}>0$；如果是负定的，那末 $a_{ii}<0$，这里 $i=1,\cdots,n$。

证明： 如果 (a_{ij}) 正定，则对于任意 $(x_1,\cdots x_n)\neq 0$ 有 $\sum a_{ij}x_ix_j>0$。在 $(x_1,\cdots x_n)$ 中取 $x_i=1$；$x_j=0(i\neq j)$，则 $\sum a_{ij}x_{ij}=a_{ii}>0$，所以 $a_{ii}>0$，$i=1,\cdots,n$。

同样，如果 (a_{ij}) 负定，取 $x_i=1,x_j=0$，$j\neq i$ 得 $\sum a_{ij}x_ix_j=a_{ii}<0$，所以 $a_{ii}<0$，$i=1,\cdots,n$。

8．假如 M 是满秩矩阵，A 是实对称矩阵，那末 $M'AM$ 与 A 的正定、负定或不定性是一致的。

证明： 因为 A 实对称，所以存在 P，使 $P'AP$ 成为标准形。又 M 满秩，所以 M^{-1} 存在。于是我们有

$$(M^{-1}P)'(M'AM)(M^{-1}P)=P'(MM^{-1})'A(MM^{-1})P=P'AP$$

所以，$M'AM$ 与 A 的正定，负定或不定性是一致的。

9．假如 A 是正定矩阵，试证 A'，A^{-1}，A^* 也都是正定矩阵。

证明： $A'=A$ 所以 A' 正定。

再因为 A 是正定，所以有满秩矩阵 P 使 $P'AP=E$，于是 $(P'AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}(P')^{-1}=P^{-1}A^{-1}(P^{-1})'=E$，因此 A^{-1} 是正定的。

又因为 A 是正定的，所以 $|A|>0$。因此 A^{-1} 存在，于是 $A^*=|A|A^{-1}$，因为 A^{-1} 正定，所以 A^* 正定。

10．假如 A 是满秩矩阵，那末 $A'A$ 是正定矩阵。

证明： 因为 A 满秩，所以 A^{-1} 存在。于是

$$(A^{-1})'A'AA^{-1}=(A^{-1})'A'=(AA^{-1})'=E$$

所以 $A'A$ 是正定的。

我们也可以这样证明，据第 8 题，A 满秩，则 $A'BA$ 与 B 的正定、负定，不定性相同，取 $B=E$，所以 $A'EA$ 正定，即 $A'A$ 正定。

11. 设二次齐式 $f(x_1, \cdots, x_n)=g_1^2+\cdots+g_p^2-g_{p+1}^2-\cdots-g_{p+q}^2$,

其中 $g_i=a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n \quad i=1, 2, \cdots, p+q$

那末二次齐式的正惯性指数 $\leqslant p$，负惯性指数 $\leqslant q$

证明： 已知 f 通过满秩线性变换

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1p+q}\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p+q,1}\cdots a_{p+q\ p+q}\cdots a_{p+qn} \\ 0\cdots\cdots\cdots 1\cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\cdots\cdots\cdots 0\cdots\cdots\cdots 1 \end{pmatrix}$$

化为 $$f(x_1, \cdots x_n)=g_1^2+g_2^2+\cdots+g_p^2-g_{p+1}^2-\cdots-g_{p+q}^2 \qquad (1)$$

设 f 又经过满秩变换

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

化为 $$f(x_1, \cdots, x_n)=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2+\cdots+y_{s+t}^2 \qquad (2)$$

则 $$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}=AB^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

设 $AB^{-1}=C$，即

$$\begin{cases} g_1=c_{11}y_1+\cdots+c_{1n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_n=c_{n1}y_1+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases} \qquad (3)$$

假如 $s>p$，则方程组

$$g_1=0, \cdots, g_p=0, y_{s+1}=0, \cdots, y_n=0,$$

即 $$\begin{cases} c_{11}y_1+\cdots+c_{1n}y_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{p1}y_1+\cdots+c_{pn}y_n=0 \\ y_{s+1}=0 \\ \quad\ddots \\ y_n=0 \end{cases}$$

中方程个数小于未知量个数，因此方程组有非零解 $(y_1, \cdots, y_s, 0, \cdots, 0)$。代入(2)，(1)，分别得到

$$f(x_1, \cdots x_n)=y_1^2+\cdots+y_s^2>0$$

$$f(x_1, \cdots, x_n)=-g_{p+1}^2-\cdots-g_{p+q}^2\leqslant 0$$

显然这是矛盾。所以 $s\leqslant p$

同理可证 $t\leqslant q$。若 $t>q$，则方程组

$$y_1=0,\cdots,y_p=0,\ g_{p+1}=0,\cdots,g_{p+q}=0,\ y_{s+t+1}=0,\cdots,y_n=0,$$

即

$$\begin{cases} y_1 \\ \quad\ddots \\ \qquad y_p = 0 \\ c_{p+1,1}y_1+\cdots+c_{p+1,n}y_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{p+q,1}y_1+\cdots+c_{p+q,n}y_n=0 \\ \qquad y_{s+t+1}=0 \\ \qquad\quad\ddots \\ \qquad\qquad y_n=0 \end{cases}$$

有非零介（$0,\cdots,0,y_{p+1},\cdots y_{p+q},0\cdots0$），代入(2)，(1)，分别得

$$f(x_1,\cdots,x_n)=-y_{s+1}^2-\cdots-y_{s+t}^2<0$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)=g_1^2+\cdots+g_p^2\geqslant0,$$

这是矛盾的，所以 $t\leqslant q$。

第六章　矩阵的标准形

§1.　特征根、特征向量

1．问 $(\lambda_0 E-A)X=0$ 的解向量是否都是 A 对于 λ_0 的特征向量？假如 $X_1,\cdots X_m$ 都是 A 对于 λ_0 的特征向量，问 $X_1,\cdots,X_m$ 的任意线性组合是否都是 A 的特征向量？

解：　$(\lambda_0 E-A)X=0$ 的非零的解向量才是 A 的特征根。

又由 $(\lambda_0 E-A)X_1=0$，$(\lambda_0 E-A)X_2=0$，…，$(\lambda_0 E-A)X_n=0$，根据矩阵运算法则有 $(\lambda_0 E-A)(C_1X_1+C_2X_2+\cdots+C_nX_n)=0$ 其中 $C_1,\cdots,C_n$ 为常数。所以 $X_1,\cdots X_n$ 的任意的非零的线性组合

$$X=C_1X_1+\cdots+C_nX_n \qquad (X\neq 0)$$

都是 A 的特征向量。

2．不同的矩阵有不同的特征根时，能否有相同的特征向量？不同的矩阵有相同的特征根时，能否有相同的特征向量？

解：　都有可能：

(1)不同矩阵有不同特征根时的例子：

$$\text{设 } A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & 5\end{pmatrix},\ \text{则}|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ +4 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2=0,\ \lambda_1=\lambda_2=3$$

$$(\lambda E_0-A)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0,$$

解之，得　$2x_1=x_2$

$$\text{又设 } B=\begin{pmatrix}6 & -2\\ -6 & 5\end{pmatrix},\ \text{则}|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & 2\\ 6 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-9)=0\ \ \lambda_1=2,\lambda_2=9$$

$$\text{对 } \lambda_1=2,\ (\lambda E_0-A)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 6 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0,$$

解之也得 $2x_1=x_2$

所以，不同矩阵的不同特征根，可以有相同的特征向量。

(2)不同矩阵有相同特征根时的例子：

$$\text{设 } C=\begin{pmatrix}7 & -2\\ -6 & 6\end{pmatrix},\ \text{则}|\lambda E-C|=\begin{vmatrix}\lambda-7 & 2\\ 6 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-10)=0\ \ \lambda_1=3,\ \lambda_2=10,$$

对于 $\lambda_1=3$有

$$(\lambda E-C)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&+2\\6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0,$$

解之得 $2x_1=x_2$ 与矩阵 A 的特征向量相同。所以不同矩阵有相同特征根时也可有相同特征向量。

3. 求下列矩阵的特征根及特征向量：

$$(1)\ \begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix}\quad(2)\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad(3)\ \begin{pmatrix}1&3&1&2\\0&-1&1&3\\0&-0&2&5\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

$$(1)\ \begin{vmatrix}\lambda&-a\\a&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+a^2=0,\ \lambda=\pm ai$$

对 $\lambda=ia$,

$$(\lambda E-A)X=\begin{pmatrix}ai&-a\\a&ai\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0,$$

基础解系是$(-i,\ 1)$，故对于 $\lambda=ai$ 矩阵的特征向量是 $k(-i,\ 1)$，$(k\neq0)$对 $\lambda=-ai$,

$$(\lambda E-A)X=\begin{pmatrix}-ai&-a\\a&-ai\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0,$$

基础解系是$(i,\ 1)$。故对于 $\lambda=-ai$ 矩阵的特征向量是 $k(i,\ 1)$ $(k\neq0)$。

$$(2)\quad|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

所以 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$ 对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$

$$(\lambda E-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,\ 即\ x_1-x_3=0$$

基础解系为$(0,1,0)$和$(1,0,1)$，故对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$的特征向量为 $k_1(0,1,0)+k_2(1,0,1)$，（k_1, k_2不全为零）。

对于 $\lambda_3=-1$,

$$(\lambda E-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\ 即\ x_1=-x_3,\ x_2=0$$

所以对应于 $\lambda_3=-1$，的特征向量为 $k(1,0,-1)$，$(k\neq0)$

$$(3)\quad |\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -3 & -1 & -2\\ & \lambda+1 & -1 & -3\\ & & \lambda-2 & -5\\ & & & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0$$

解得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=\lambda_4=2$

对于 $\lambda_1=1$

$$(\lambda E-A)X=\begin{pmatrix}0 & -3 & -1 & -2\\ & 2 & -1 & -3\\ & & -1 & -5\\ & & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$$

基础解系是(1, 0, 0, 0)，所以对于 $\lambda_1=1$的特征向量是$k(1,\ 0,\ 0,\ 0)$，$(k\neq0)$。

对于 $\lambda_2=-1$

$$(\lambda E-A)X=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -1 & -2\\ & 0 & -1 & -3\\ & & -3 & -5\\ & & & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$$

基础解系是(−3, 2, 0, 0)。所以对应于 $\lambda_2=-2$，的特征向量是 $k(-3,\ 2,\ 0,\ 0)$，$(k\neq0)$。

对于 $\lambda_3=\lambda_4=2$

$$(\lambda E-A)X=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1 & -2\\ & 3 & -1 & -3\\ & & & -5\\ & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$$

基础解系是(6, 1, 3, 0)，所以 $\lambda=2$ 的特征向量是 $k(6,\ 1,\ 3,\ 0)$，$(k\neq0)$。

4. 假如任意非零 n 维向量都是 n 阶矩阵 A 的特征向量，试证 A 是数量矩阵。

证明：设 $AX=\lambda X$，

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{pmatrix},$$

命 $X=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$则得 $a_{11}=\lambda_1$，$a_{i1}=0$，$i=2,\ \cdots,n$，命 $X=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\cdots\\\vdots\\0\end{pmatrix}i$ 行，则 $a_{ii}=\lambda_i,a_{ij}=0$

$i \neq j, i = 1,2,\cdots n$。再命 $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$，得 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = k$。所以 $A = \begin{pmatrix} k & & \\ & \ddots & \\ & & k \end{pmatrix}$。

5. 假如 $A^2 = E$。那末 A 的特征根只能是 ± 1。

证明：设 $AX = \lambda X$，则 $A^2X = \lambda AX$，即 $EX = \lambda^2 X$。所以$(\lambda^2 - 1)x = 0$，因为$X \neq 0$所以 $\lambda^2 = 1$，因此 A 的特征根只能是 ± 1。

6. 假如 λ 是 A 的特征根，试证 λ^m 是 A^m 的特征根，这里 m 是正整数。如果X是 A 对于 λ 的特征向量，那末 A^m 对于 λ^m 的特征向量是什么？

证明：用数学归纳法证明：

$m = 1$ 时　据假设得 $AX = \lambda X$，其中 x 为特征向量。假设 $m - 1$ 时结论成立，即 $A^{m-1}X = \lambda^{m-1}X$，则

$$A^mX = AA^{m-1}X = A\lambda^{m-1}X = \lambda^{m-1}AX = \lambda^m X$$

所以 λ^m 是 A^m 的特征根，A^m 对于 λ^m 的特征向量显然是 X

7. 假如X是 A 的特征向量，证明X也是 $f(A)$的特征 向量。这里$f(x)$是 x 的多项式。并问对于 X 的 A 的特征根与 $f(A)$ 的特征根有何关系？

证明：设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

因为 X 是 A 的特征向量，所以 $AX = \lambda X$。根据上题，有 $A^mX = \lambda^m X$，于是

$$\begin{aligned} \therefore f(A)X &= a_m A^m x + a_{m-1}A^{m-1}X + \cdots + a_1 AX + a_0 X \\ &= a_m \lambda^m X + a_{m-1}\lambda^{m-1}X + \cdots + a_1\lambda X + a_0 X \\ &= (a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots a_1\lambda + a_0)X \\ &= f(\lambda)X \end{aligned}$$

所可 x 就是 $f(A)$对于 $f(\lambda)$的特征向量。

8. 已知满秩矩阵 A 的特征根及特征向量，试求 A^{-1} 的特征根及特征向量。

解：设 $AX = \lambda X$，λ 为特征根，X为特征向量。因为 A 满秩，所以 $|A| \neq 0$，因此 A^{-1} 存在，$\lambda \neq 0$，于是

$$A^{-1}AX = \lambda A^{-1}X。\text{即 } A^{-1}X = \lambda^{-1}X,$$

所以 A^{-1} 的特征根是 λ^{-1}，特征向量是 X。

9. 假如 X 是 A 对于 λ_0 特征向量，试求 $P^{-1}AP$ 对于 λ_0 的特征向量。

解：设$(\lambda_0 E - A)X = 0$，因为

$$(\lambda E - P^{-1}AP)X = (\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP)X = P^{-1}(\lambda E - A)PX,$$

所以　$$(\lambda_0 E - P^{-1}AP)P^{-1}X = P^{-1}(\lambda_0 E - A)PP^{-1}X = P^{-1}(\lambda_0 E - A)X = 0$$

即　$$(\lambda_0 E - P^{-1}AP)P^{-1}X = 0$$

所以，$P^{-1}AP$ 对于 λ_0 的特征向量为 $P^{-1}X$.

10. 假定 n 阶矩阵 A 的任意一行中 n 个元素的和都是 a，试证 $\lambda=a$ 是 A 的特征根，并且$(1,\cdots 1,)$是 A 对于 $\lambda=a$ 的特征向量。

证明： 因为 $a=a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}, i=1,\cdots,n$, 所以

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12}\cdots\cdots-a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22}\cdots\cdots-a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ -a_{n1}\cdots\cdots & \cdots\cdots\lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-a & -a_{12}\cdots\cdots-a_{1n}\\ \lambda-a & a-a_{22}\cdots\cdots-a_{2b}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \lambda-a & -a_{n2}\cdots a-a_{nn}\end{vmatrix}$$

因此 $\lambda=a$ 是 A 的特征根。

$$又 A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+\cdots+a_{1n}\\ \cdots\cdots\\ a_{n1}+\cdots+a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ \vdots\\ a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

所以$\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$是 A 对于 a 的特征向量。

11. 两个矩阵假如等价，它们是否相似？又假如相似，是否等价？哪些矩阵与单位矩阵等价？哪些矩阵与单位矩阵相似？

解： 我们知道，假如 $A\sim B$ 那就存在满秩 P，使 $P^{-1}AP=B$，假如 $A\cong B$ 那就有满秩 Q,R，使 $B=QAR$、因此如果 $A\sim B$ 令 $P^{-1}=Q$ $P=R$，就得到 $B=QAR$，所以 $A\cong B$。反之因为 R 不一定等于 Q^{-1}，所以，等价是相似的必要条件，但非充分条件。

任何满秩矩阵都可用初等变换化为单位矩阵。所以，满秩矩阵都与单位矩阵等价。

又若 $A\sim E$，则 $A=P^{-1}EP=P^{-1}P=E$ 所以只有单位矩阵才与单位矩阵相似。

§ 2. 矩阵的对角形

1. 假如矩阵 A 的特征根是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, A 的特征向量是 $X_1,\cdots,X_n$, $P=(X_1\cdots X_n)$，问下式是否成立？

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

解： 只有当 $X_1,\cdots,X_n$ 线性无关时才能成立。否则 P 是降秩的，P^{-1}不存在。

2. 在上节习题 3 中哪些矩阵与对角形矩阵相似？在可以化成角形时，需要的变换矩阵是什么？

解： (1)中有两个线性无关的特征向量$(-i,1)$，$(i,1)$，故能与对角矩阵相似：这时取

$$P=\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

于是 $P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ai & \\ & -ai \end{pmatrix}$

（2）中有三个线性无关的特征向量（0,1,0)，（1,0,1)，（1,0,－1)，所以能与对角形矩阵相似。取

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

于是 $P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$。

（3）中没有四个线性无关的特征向量，所以它不与对角形矩阵相似。

3. 能否用初等变换把 $P^{-1}AP$ 化为对角形?

解 不能用，因为 $P=E_1\cdots E_m$ 时，$P^{-1}=E_m^{-1}\cdots E_1^{-1}$，于是 $P^{-1}AP=E_m^{-1}\cdots E_1^{-1}AE_1\cdots E_m$ 但 $E_1^{-1}AE_1$ 远不及 E'_1AE 简便，不便于使用初等变换。

§ 3. 实对称矩阵的对角形

1. 试用正交矩阵把下列实对称矩阵化为对角形：

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$。

解：（1）先求特征根：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-10)(\lambda-1)^2=0,\quad \lambda_1=10,\quad \lambda_2=\lambda_3=1。$$

求对于 $\lambda_1=10$ 的特征向量：

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & +5 & 4 \\ 2 & 4 & +5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0,\quad 即\begin{cases} 4x_1-x_2+x=0 \\ -2x_1+5x_2+4x_3=0 \\ 2x_1+4x_2+5x_3=0 \end{cases}$$

也就是
$$\begin{cases} 2x_1+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$$

解之得 $x_1 = k$，$x_2 = 2k$，$x_3 = -2k$，取 $x_1 = 1$，$x_2 = 2$，$x_3 = -2$，单位化就得到

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

求对于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的特征向量：

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

即 $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$，取解为：

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

正交化，单位化后得

$$X_2 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$

所以 $A \sim \begin{pmatrix} 10 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$

（2）$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2 = 0$

所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 3$，$\lambda_4 = -1$

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，

$$(\lambda E-A)X=\begin{pmatrix}0&-1&0&1\\-1&0&1&0\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$$

解之得 $x_1=x_3$，$x_2=x_4$。取

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_3=3$，

$$(\lambda E-A)X=\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\-2&2&1&0\\0&1&2&-1\\1&0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0,\quad \text{解得}X_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_4=-1$，

$$(\lambda E-A)X=\begin{pmatrix}-2&-1&0&1\\-1&-2&1&0\\0&1&-2&-1\\1&0&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0,\quad \text{解得}X_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

显然 X_1, X_2, X_3, X_4 已正交。将它们单位化即得：

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\qquad A\sim\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&3&\\&&&-1\end{pmatrix}$$

2．试用正交变换化下列二次齐式为平方和：

（1）$2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$

（2）$8x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+8x_2x_4$

解：（1）的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}。$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-4)=0$$

所以 $\lambda_1=4$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=-2$。求特征向量。

对于 $\lambda_1=4$

$$(\lambda E-A)X=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0,\qquad 解得\ X_1=\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_2=1$，

$$(\lambda E-A)X=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0,\qquad 解得\ X_2=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_3=-2$，

$$(\lambda E-A)X=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0\qquad 解得\ X_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$$

因为 X_1，X_2，X_3，是两两正交，把它们单位化即得

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix},\qquad A\sim\begin{pmatrix}4 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$$

于是所给的二次齐式 f 经过正交变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix},\qquad 或\begin{cases}y_1=\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\\ y_2=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3\\ y_3=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3\end{cases}$$

就化为 $f=4y_1^2+y_2^2-2y_3^2$。

（2）的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

求特征根：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -4 & -1\\ 0 & \lambda & -1 & -4\\ -4 & -1 & \lambda & 0\\ -1 & -4 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+5)(\lambda-3)(\lambda+3)=0$$

所以 $\lambda_1=5$，$\lambda_2=-5$，$\lambda_3=3$，$\lambda_4=-3$，求特征向量。

对于 $\lambda_1=5$，

$$(\lambda E-A)X=\begin{pmatrix}5 & 0 & -4 & -1\\ 0 & 5 & -1 & -4\\ -4 & -1 & 5 & 0\\ -1 & -4 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=0,\quad 解得\quad X_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_2=-5$，

$$(\lambda E-A)X=\begin{pmatrix}-5 & 0 & -4 & -1\\ 0 & -5 & -1 & -4\\ -4 & -1 & -5 & 0\\ -1 & -4 & 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=0,\quad 解得\quad X_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_3=3$，

$$(\lambda E-A)X=\begin{pmatrix}3 & 0 & -4 & -1\\ 0 & 3 & -1 & -4\\ -4 & -1 & 3 & 0\\ -1 & -4 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=0,\quad 解得\quad X_3=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_4=-3$，

$$(\lambda E-A)X=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -4 & -1\\ 0 & -3 & -1 & -4\\ -4 & -1 & -3 & 0\\ -1 & -4 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=0,\quad 解得\quad X_4-\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

只将 X_1，X_2，X_3，X_4 单位即得到

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\qquad A\sim\begin{pmatrix}5 & & & \\ & -5 & & \\ & & 3 & \\ & & & -3\end{pmatrix}$$

于是所给二次齐式 f 经过正交变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad \text{或} \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ y_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ y_3 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ y_4 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

就化为 $f = 5y_1^2 - 5y_2^2 + 3y_3^2 - 3y_4^2$

3．用直角坐标变换化简二次曲面方程

$$3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2zx - 8x - 6y - 2z + 3 = 0$$

解：

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$$

求特征向量，对于 $\lambda_1 = 1$，

$$(\lambda E - A)X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{解得 } X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_2 = 2$

$$(\lambda E - A)X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{解得 } X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_3 = 4$

$$(\lambda E - A)X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{解得 } X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将 X_1，X_2，X_3 单位化即得

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{即} \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}z' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ Z = -\frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z' \end{cases}$$

代入二次曲面方程左边，则

$$f = x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}y' - \frac{24}{\sqrt{6}}z' + 3$$

$$= x'^2 + 2\left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(z' - \frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2 - 4$$

$$= x''^2 + 2y''^2 + 4z''^2 - 4 = 0$$

即

$$\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{2} + z''^2 = 1$$

这里

$$\begin{cases} x_{+} = \frac{1}{\sqrt{3}}x'' + \frac{2}{\sqrt{6}}z'' + 1 \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'' + 1 \\ Z = -\frac{1}{\sqrt{3}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + \frac{6}{\sqrt{6}}z'' \end{cases}$$

4. 求证实反对称矩阵的特征根是零或是纯虚数。

证明：设 $\lambda X = AX$，则 $\lambda X' = X'A'$. 因为 $A = -A'$，所以 $\overline{\lambda X^1} = \overline{X'A'} = -\overline{X}'A$，于是

$$\overline{\lambda X'}X = -\overline{X'A}X = -\overline{X}'\lambda X = -\lambda\overline{X}'X$$

即 $(\overline{\lambda} + \lambda)\overline{X}'X = 0$ 但 $\overline{X}'X \neq 0$，所以 $\overline{\lambda} + \lambda = 0$ 即 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = ki$

§ 4. λ-矩 阵 的 初 等 因 子

1. 求下列 λ-矩阵的初等因子：

(1) $\begin{pmatrix} 0 & \lambda^3(\lambda-2)^3 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(\lambda-2)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 14 & 5 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix} \lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{pmatrix}$

解：

$$(1)\ A(\lambda)\cong\begin{pmatrix}\lambda(\lambda-2)^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^3(\lambda-2)^3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2\\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix}\lambda(\lambda-2)^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^3(\lambda-2)^3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

所以 $A(\lambda)$ 的初等因子为

$\lambda,\ \lambda,\ \lambda^3,\ \lambda+1,\ \lambda-2,\ \lambda-2,\ (\lambda-2)^2,\ (\lambda-2)^3$

$$(2)\ A(\lambda)\cong\begin{pmatrix}\lambda-3 & -1 & 0 & 0\\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ -6\lambda+14 & -\lambda+5 & \lambda(\lambda-2)+1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix}\lambda-3 & -1 & 0 & 0\\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -(\lambda-1)^2 & 0 & \lambda(\lambda-2)+1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & 0\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1 & & & \\ & (\lambda-1)^2 & & \\ & & 1 & \\ & & & (\lambda-1)^2\end{pmatrix}$$

所以 $A(\lambda)$ 的初等因子为 $(\lambda-1)^2$，$(\lambda-1)^2$.

$$(3)\ A(\lambda)\cong\begin{pmatrix}1 & \lambda & 0 & 0\\ \lambda & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1 & \lambda\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^2 & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&\lambda^2&0\\0&\lambda&\lambda&0\\0&1&0&\lambda\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\lambda-\lambda^3&0\\0&0&-\lambda^2&\lambda\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\lambda(\lambda^2-1)&0\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

所以 $A(\lambda)$ 的初等因子是 λ，λ，$\lambda-1$，$\lambda+1$

$$(4)\ A(\lambda)\cong\begin{pmatrix}1&\beta&\lambda+\alpha&0\\0&\lambda+\alpha&-\beta&1\\\lambda+\alpha&0&0&\beta\\-\beta&0&0&\lambda+\alpha\end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\lambda+\alpha&-\beta&1\\0&-\beta(\lambda+\alpha)&-(\lambda+\alpha)^2&\beta\\0&\beta^2&\beta(\lambda+\alpha)&\lambda+\alpha\end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\beta^2-(\lambda+\alpha)^2&-2\beta(\lambda+\alpha)\\0&0&2\beta(\lambda+\alpha)&\beta^2-(\lambda+\alpha)^2\end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2\beta^3&-2\beta(\lambda+\alpha)\\0&0&3\beta^2(\lambda+a)+(\lambda+a)^3&\beta^2-(\lambda+\alpha)^2\end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\beta^2&0\\0&0&3\beta^2(\lambda+\alpha)+(\lambda+\alpha)^3&[(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2\end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&[(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2\end{pmatrix}$$

所以 $A(\lambda)$ 的初等因子是 $(\lambda+\alpha+\beta i)^2$，$(\lambda+\alpha-\beta i)^2$。

2． 证明：两个等价的 n 阶 λ-矩阵的行列式只相差一个非零的常数因子。

证明： 根据行列式的性质，n 阶矩阵经过第一及第三两种初等变换，它的行列式不变，经过第二种变换后，它的行列式只多了一个非零的常数因子。

§ 5. 约 旦 标 准 形

1. 求下列矩阵的约旦标准形：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解：

$$(1)\ \lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ \lambda(\lambda-2) & \lambda-2 & 0 \\ 2(\lambda+2) & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda(\lambda-2) & -(\lambda-1)(\lambda-2) & 0 \\ -2(\lambda+2) & -2(\lambda+1) & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 2(\lambda+1) & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

所以 A 的特征矩阵的初等因子是 $\lambda-1$，$\lambda-2$，$\lambda+1$，

因此　　$A \sim J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$$(2)\ \lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-3 & 7 & 3 \\ 2 & \lambda+5 & -2 \\ 4 & 10 & \lambda-3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \lambda & -7 & 3 \\ 0 & \lambda+5 & -2 \\ \lambda+1 & 10 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

$$\cong \begin{pmatrix} \lambda & -7 & 3 \\ 0 & \lambda+5 & -2 \\ 1 & 17 & \lambda-6 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 17 & \lambda-6 \\ 0 & \lambda+5 & -2 \\ 0 & -17\lambda-7 & -\lambda^2+6\lambda+3 \end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+5 & -2 \\ 0 & -17\lambda-7 & -\lambda^2+6\lambda+3 \end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -2 \\ 0 & -\lambda^3+6\lambda^2-31\lambda-14- & \lambda^2+6\lambda+3 \end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1 & -\lambda^2+6\lambda+3 \end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1) \end{pmatrix}$$

所以，它的初等因子是 $\lambda-1$，$\lambda-i$，$\lambda+i$

因此， $$A\sim J=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & i & \\ & & -i \end{pmatrix}$$

$$(3)\ \lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -7 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 17 & 6 & 1 & \lambda \end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & -(\lambda+1) & 0 & 0 \\ -(\lambda+4) & 1 & \lambda-2 & -1 \\ 6\lambda-1 & -6 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -(a+1) & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ 1 & -(\lambda+4) & \lambda-2 & -1 \\ -6 & 6\lambda-1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda+4) & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -(\lambda-1)^2 & (\lambda-1)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & (\lambda-1)^2 & 0 \end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$$

所以初等因子是$(\lambda-1)^2(\lambda-1)^2$，因此

$$A \sim J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4)\ \lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ -1 & \lambda & & \\ & -1 & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & -1 & \lambda \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & & & \lambda^n \\ -1 & 0 & & \lambda^{n-1} \\ & -1 & 0 & \lambda^{n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\cong \begin{pmatrix} 0 & & & \lambda^n \\ -1 & 0 & & 0 \\ & -1 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & \lambda^n \end{pmatrix}$$

所以，初等因子是 λ^n，于是

$$A \sim J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

2.假设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

利用约旦标准形求 A^6

解：

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ 0 & \lambda + 3 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

$$\cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 48 & \lambda + 11 & 0 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 11) & -2(\lambda - 1) & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 48 & 0 & 0 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 11) & (\lambda - 1)(\lambda^2 - 25) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda^2 - 25) \end{pmatrix}$$

所以初等因子是 $\lambda-1$，$\lambda-5$，$\lambda+5$ 因此，

$$A\sim J=\begin{pmatrix}1&&\\&5&\\&&-5\end{pmatrix}$$

求 A 的特征向量：

$$(\lambda E-A)X_1=\begin{pmatrix}0&-4&-2\\0&2&-4\\0&-4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,\quad 解得 X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$(\lambda E-A)X_2=\begin{pmatrix}4&-4&-2\\0&8&-4\\0&-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,\quad 解得 X_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$(\lambda E-A)X_3=\begin{pmatrix}-6&-4&-2\\0&-2&-4\\0&-4&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,\quad 解得 X_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$取 P=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&0&-5\\0&1&2\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

得 $P^{-1}AP=J$ 或 $A=PJP^{-1}$，

$$于是 A^5=PJ^5P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&5^5&\\&&(-5)^5\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&0&-5\\0&1&2\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&5^4&2\cdot5^4\\0&2\cdot5^4&-5^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\cdot5^4&3\cdot5^4-1\\0&-3\cdot5^4&4\cdot5^4\\0&4\cdot5^4&3\cdot5^4\end{pmatrix}$$

3. 假如有正整数 m 使 $A^m=E$，那末 A 与对角形矩阵相似。

证明： 假定 $P^{-1}AP=J$，

$$J=\begin{pmatrix}J_1&&\\&\ddots&\\&&J_t\end{pmatrix}$$

因为 $A^m=E$，所以 $J^m=P^{-1}P=E$，即 J^m 是单位阵。

$$但 J^m=\begin{pmatrix}J_1^m&&\\&\ddots&\\&&J_t^m\end{pmatrix}。$$

由第四章 §1 习题1（4）

$$J_i^m=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1\\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix}\lambda_i^m & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i^m\end{pmatrix}$$

因此 $J_i=\lambda_i$ 所以 A 与对角形矩阵相似。

4. 试证明：A 为幂零矩阵（$A\neq 0$，但有大于1的正整数 m 使 $A^m=0$）的充要条件是它的特征根全为零。

证明：（1）必要性：设 $A^m=0$。由 $\lambda^m X=A^m X=OX=0$，$X\neq 0$ 得 $\lambda^m=0$ 所以 $\lambda=0$ 即 A 的特征根都是零。

（2）充分性：设

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_t\end{pmatrix}.$$

J_s 是阶数最高的约旦块，阶数为 k。因为

$$J_s=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{pmatrix},\quad J_s^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & 0 & \ddots & 1\\ & & & \ddots & 0\\ & & & & 0\end{pmatrix},\ \cdots,$$

$$J_s^k=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 1\\ & \ddots & \vdots\\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}=0$$

所以 $J_i^k=0$，$i=1,\cdots t$，因此

$$J^k=\begin{pmatrix}J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_t^k\end{pmatrix}=0$$

于是我们有 $$A^k=PJ^kP^{-1}=0$$

即 A 是幂零矩阵

5）假如矩阵 $A=A^2$，试证 A 与下面对角形矩阵相似

$$\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$$

证明：因为

$$\lambda X=AX=A^2X=\lambda AX=\lambda^2 X$$

所以$(\lambda-\lambda^2)X=0$，但 $X\neq 0$，因此 $\lambda-\lambda^2=0$，所以 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$，即 A 的特征 根是0或1

假定 $A=PJP^{-1}$，即 $A^2=PJ^2P^{-1}$，因此

$$J^2=J,$$

即

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_t \end{pmatrix}=J^2=\begin{pmatrix} J_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & J_t^2 \end{pmatrix}$$

于是 $J_i^2=J_i$，$i=1,\cdots,t$，如果

$$J_i=\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

那末 $J_i^2\neq J_i$ 如果

$$J_i=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

那末 $J_i^2\neq J_i$，故约旦块 $J_1,\cdots,J_t$ 都是一阶矩阵，即 $J_i=(\lambda_i)$所以 t 等于 A 的阶数 n，假如 A 有 r 个特征根1，s 个特征根0，那末

$$A\sim J=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

（其中 1 有 r 个，0 有 s 个）

§ 6. 两个定理的证明

1． 已知7阶 $\lambda-$矩阵 $A(\lambda)$的秩为5，初等因子是

$$\lambda,\ \lambda,\ \lambda^3,\ \lambda-2,\ (\lambda-2)^4,\ (\lambda-2)^4$$

求 $A(\lambda)$的各阶子式的最高公因式。

解： 因为 $E_5=\lambda^3(\lambda-2)^4$，$E_4=\lambda(\lambda-2)^4$，$E_3=\lambda(\lambda-2)$，$E_2=E_1=1$

所以 $$D_1=D_2=1,\ D_3=D_2E_3=\lambda(\lambda-2),$$

$$D_4=E_4D_3=\lambda^2(\lambda-2)^5,\ D_5=E_5D_4=\lambda^5(\lambda-2)^9$$

2． 利用各阶子式的最高公因式，求下列 λ 矩阵的初等因子：

$$(1)\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} \qquad (2)\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 3 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

$$(3)\begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} (4)\begin{pmatrix} \lambda-a & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-a & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-a \end{pmatrix}$$

解：（1） $D_3=(\lambda-2)^3$。右上角二阶子式为1，所以

$$D_2=D_1=1,\ E_1=E_2=1,\ E_3=(\lambda-2)^3,$$

初等因子就是 $$(\lambda-2)^3$$

（2） $D_4=\lambda^3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \lambda+2 \end{vmatrix}=\lambda^3(\lambda-1)$,

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 3 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-1)$$

由此可知 $D_3=1$，因此 $D_1=D_2=1$，于是

$$E_1=F_2=E_3=1,\ E_4=\lambda^3(\lambda-1),$$

初等因子是 λ^3，$\lambda-1$。

（3） $$|A|=(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & \lambda+2 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & \lambda+2 \\ \lambda+2 & 0 \end{vmatrix}=-(\lambda+2)^4$$

所以 $D_4=(\lambda+4)^4$，又右上角的三阶子式显然是 -1，因此 $D_3=D_2=D_1=1$，于是 $E_1=E_2=E_3=1$，$E_4=(\lambda+2)^4$，所以，初等因子是$(\lambda+2)^4$；

（4） 显然 $D_n=(\lambda-a)^n$，$D_{n-1}=D_{n-2}=\cdots=D_1=1$，所以

$$E_1=\cdots=E_{n-1}=1,\ E_n=(\lambda-a)^n,$$

初等因子是$(\lambda-a)^n$。

3． 试证 $\lambda-$矩阵 $A(\lambda)$是可逆矩阵的充要条件是 $A(\lambda)$与单位矩阵等价。

证明： 假如 n 阶入－矩矩阵 $A(\lambda)$是可逆，则$|A(\lambda)|=k(\neq 0)$，所以 $D_n(\lambda)=1$，因此 $D_n(\lambda)=D_{n-1}(\lambda)=\cdots=D_1(\lambda)=1$，但 n 阶单位矩阵的各阶子式的最高公因式也都是1，即

$A(\lambda)$与 E 有相同的 $D_i(\lambda)$，根据 λ－矩阵等价的充要条件，$A(\lambda)\cong E$。

反之，若 $A(\lambda)\cong E$，则 $D(\lambda)=1$，所以$|A(\lambda)|=k\neq 0$，因此 $A(\lambda)$为可逆的 λ－矩阵。

4. 证明

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda-a & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-a & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a & 0 & 0 & -1 \\ \beta^2 & 1 & 0 & \lambda-a & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 1 & 0 & \lambda-a & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & \lambda-a \end{pmatrix}$$

与

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & \\ & & & (\lambda-a)^2+\beta^2 & 1 & 0 \\ & & & 0 & (\lambda-a)^2+\beta^2 & 1 \\ & & & 0 & 0 & (\lambda-a)^2+\beta^2 \end{pmatrix}$$

等价。再求 $A(\lambda)$的初等因子。

解：

$$A(\lambda)\cong\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \beta^2+(\lambda-a)^2 & 1 & 0 & \lambda-a & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2+(\lambda-a)^2 & 1 & 0 & \lambda-a & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2+(\lambda-a)^2 & 0 & 0 & \lambda-a \end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ (\lambda-a)^2+\beta^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-a)^2+\beta^2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-a)^2+\beta^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cong B(\lambda)$$

显然 $D_6=[(\lambda-a)^2+\beta^2]^3$，$D_5=D_4=D_3=D_2=D_1=1$

$E_1=E_2=E_3=E_4=E_5=1$，$E_6=[(\lambda-a)^2+\beta^2]^3$，$A(\lambda)$的初 等因 子是$(\lambda-a+\beta_i)^2$，$(\lambda-a-\beta_i)^3$。

第七章　线性空间和线性变换

§ 1.　线性空间的概念

1．判别以下集合对于所指的运算是否构成实线性空间：

（1）次数等于 $n(n\geqslant 1)$ 的实系数多项式的全体对于多项式的加法和数积；

（2）实对称（反对称）矩阵的全体，对于矩阵的加法和数积；

（3）平面上不平行于某一向量的全体向量，对于向量的加法和数积；

（4）主对角线上各元之和为零的 n 阶矩阵的全体，对于矩阵的加法和数积。

解：（1）否，因为两个 n 次多项式相加不一定是 n 次多项式。

（2）构成实线性空间。

只须证明对称（反对称）矩阵对加法与数积是封闭的，即仍然是对称（反对称）矩阵就行了，因为定义中其他条件显然对矩阵是满足的。

假如 A 是对称矩阵，则

$$(A+B)'=A'+B'=A+B,\qquad (\lambda A)'=\lambda A'=\lambda A$$

假如 A 是反对称矩阵，则

$$(A+B)'=A'+B'=-A-B=-(A+B)$$

$$(\lambda A)'=\lambda A'=\lambda(-A)=-(\lambda A)$$

所以构成线性空间。

（3）不构成线性空间，例如以那个已知向量为对角线的任意两个向量，它们的和不属于这个集合。

（4）构成实线性空间。因为 n 阶矩阵满足线性空间定义所要求的各条件，并且所讨论的矩阵对加法和数积也是封闭的：

$$\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ * & & a_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 & & * \\ & \ddots & \\ * & & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & & *' \\ & \ddots & \\ *' & & a_n+b_n \end{pmatrix}$$

如果 $\sum\limits_{i=1}^{u} a_i=0$，$\sum\limits_{i=1}^{n} b_i=0$，则必有 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=0$

2．在 n 维空间 R_n 中，分量满足下列条件的全体向量能否构成子空间？

$$（1）\quad x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \qquad\qquad （2）\quad x_1+x_2+\cdots+x_n=1$$

解：（1）能构成线性空间。因为向量运算满足线性空间所要求的性质。而所讨论的向量对加法和数积是封闭的：

$$(x_1'+x_1)+(x_2'+x_2)+\cdots+(x_n'+x_n)$$

$$=(x_1'+x_2'+\cdots+x_n')+(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0,$$

$$\lambda x_1+\lambda x_2+\cdots+\lambda x_n=\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0。$$

（2）不构成线性空间。因为所讨论的向量对加法和数积不封闭：

$$(x_1'+x_1)+(x_2'+x_2)+\cdots+(x_n'+x_n)$$

$$=(x_1'+x_2'+\cdots+x_n')+(x_1+x_2+\cdots+x_n)=2\neq 1。$$

3. 假设 α,β,γ 是线性空间 V 中向量，试证明它们的线性组合全体构成 V 的子空间。这子空间叫做由 α,β,γ 生成的子空间，用 $[\alpha,\beta,\gamma]$ 表示。

证明：因为 $$(a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma)+(a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma)$$

$$=(a_1+a_2)\alpha+(b_1+b_2)\beta+(c_2+c_2)\gamma$$

$$k(a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma)=ka_1\alpha+kb_1\beta+kc_1\gamma。$$

根据定理 2 得知 α,β,γ 的线性组合全体构成线性空间，即 $[\alpha,\beta,\gamma]$ 是线性空间。

4. 试证在 R_4 中由(1，1，0，0)，(1，0，1，1)生成的子空间与由(2，－1，3，3)，(0，1，－1，－1)生成的子空间是一致的。

证明：设 $\alpha_1=(1,1,0,0)$，$\alpha_2=(1,0,1,1)$，$\beta_1=(2,-1,3,3)$，$\beta_2=(0,1,-1,-1)$，因为

$$\beta_1=-\alpha_1+3\alpha_2,\qquad \beta_2=\alpha_1-\alpha_2 \tag{1}$$

所以 β_1,β_2 的线性组合也是 α_1,α_2 的线性组合，因此

$$[\beta_1\beta_2]\subseteq[\alpha_1,\alpha_2]$$

又由（1）得

$$\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta_1+3\beta_2),\qquad \alpha_2=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2),$$

所以，α_1,α_2 的线性组合也是 β_1,β_2 的线性组合，因此

$$[\alpha_1,\alpha_2]\subseteq[\beta_1,\beta_2]$$

于是 $$[\alpha_1,\alpha_2]=[\beta_1,\beta_2]$$

即两个子空间是一致的。

§2. 基底、坐标

1. 试证明：$1\cdot\alpha=\alpha$，$(-1)\alpha=-\alpha$，这里 α 是有穷维线性空间的任意向量。这就是说假如空间是有穷维，那末条件 $1\cdot\alpha=\alpha$ 可以证明，不必在定义中给出。

证明：假定 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的基底，

$$\alpha = a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{\alpha}_n;$$

则

$$1\cdot\boldsymbol{\alpha} = 1(a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{\alpha}_n) = (1\cdot a_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + (1\cdot a_n)\boldsymbol{\alpha}_n$$

$$= a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\alpha};$$

$$(-1)\cdot\boldsymbol{\alpha} = -1(a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{\alpha}_n) = -a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + (-a_n\boldsymbol{\alpha}_n) = -\boldsymbol{\alpha}。$$

2. 求§1 习题1(2)中线性空间的基底与维数。

解：实对称矩阵空间中任一元

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} \cdots a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{nn}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots \ 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{n,n-1}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

所以基底是：

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots \ 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

维数是 $\dfrac{n(n+1)}{2}$。

又任一实反对称矩阵可表示为：

$$\begin{pmatrix} 0 \cdots\cdots a_{1n} \\ \ddots \\ -a_{1n} \cdots 0 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{1n}\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ -1 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \cdots + a_{n-1,n}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

所以基底是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ -1 & & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

维数是 $\dfrac{n(n+1)}{2} - n = \dfrac{n(n-1)}{2}$。

3． 求 R_3 中向量 $\boldsymbol{\alpha}=(3,7,1)$对基底

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5),\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(6,3,2),\qquad \boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,0)$$

的坐标。

解：假定 $(3,7,1)=a_1(1,3,5)+a_2(6,3,2)+a_3(3,1,0)$

$$=(a_1+6a_2+3a_3,\ 3a_1+3a_2+a_3,\ 5a_1+2a_2),$$

即

$$\begin{cases} a_1+6a_2+3a_3=7 \\ 3a_1+3a_2+a_3=7 \\ 5a_1+2a_2=1 \end{cases}$$

解之得 $a_1=33$，$a_2=-82$，$a_3=154$，

因此所求坐标为(33，－82，154)。

4． 试求 R_3 中向量对两组基底

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1)$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4),\ \boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1),\ \boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6)$$

的不同坐标间的关系。

解：假定 R_3 的原来基底是 $\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$，那末

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}$$

于是 $$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-18&7&5\\5&-2&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\5&12&8\end{pmatrix}$$

但
$$\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & 19 & \frac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\frac{63}{2} \\ 7 & 10 & \frac{99}{4} \end{pmatrix}$$

所以
$$(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 13 & -9 & 7 \\ 19 & -13 & 10 \\ \frac{181}{4} & -\frac{63}{2} & \frac{99}{4} \end{pmatrix}$$

其中 y_1, y_2, y_3 是 R_3 中元 α 对基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的坐标，x_1, x_2, x_3 是 α 对 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标

5. 在 R_4 中有两组基底

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1, 0, 0, 0) \\ \alpha_2 = (0, 1, 0, 0) \\ \alpha_3 = (0, 0, 1, 0) \\ \alpha_4 = (0, 0, 0, 1) \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 = (2, 1, -1, 1) \\ \beta_2 = (0, 3, 1, 0) \\ \beta_3 = (5, 2, 3, 1) \\ \beta_4 = (6, 6, 1, 3) \end{cases}$$

（1）求由前组基底到后组基底的变换矩阵；

（2）求向量 $\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 对后组基底的坐标；

（3）求对两组基底有相同坐标的非零向量。

解：（1）设原来的基底为 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$

则
$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, {}_4) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}.$$

(2)设 y_1, y_2, y_3, y_4 为 α 对后一组基底的坐标，则

$$(y_1,y_2,y_3,y_4)=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}^{\prime-1}$$

$$=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\0&3&1&0\\5&3&2&1\\6&6&1&3\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}\frac{4}{9}&\frac{1}{27}&\frac{1}{3}&-\frac{7}{27}\\\frac{1}{3}&\frac{4}{9}&0&-\frac{1}{9}\\-1&-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{11}{9}&-\frac{23}{27}&-\frac{2}{3}&\frac{26}{27}\end{pmatrix}.$$

(3)令(2)中 $x_1=y_1$，$x_2=y_2$，$x_3=y_3$，$x_4=y_4$，得

$$\begin{cases}\frac{4}{9}x_1+\frac{1}{3}x_2-\quad x_3-\frac{11}{9}x_4=x_1\\\frac{1}{27}x_1+\frac{4}{9}x_2-\frac{1}{3}x_3-\frac{23}{27}x_4=x_2\\\frac{1}{3}x_1\qquad\qquad\qquad-\frac{2}{3}x_4=x_3\\-\frac{7}{27}x_1-\frac{1}{9}x_2+\frac{1}{3}x_3-\frac{26}{27}x_4=x_4\end{cases},$$

即

$$\begin{cases}-\frac{5}{9}x_1+\frac{1}{3}x_2-\quad x_3-\frac{11}{9}x_4=0\\\frac{1}{27}x_1-\frac{5}{9}x_2-\frac{1}{3}x_3-\frac{23}{27}x_4=0\\\frac{1}{3}x_1\qquad\quad-x_3\quad-\frac{2}{3}x_4=0\\-\frac{7}{27}x_1-\frac{1}{9}x_2+\frac{1}{3}x_3-\frac{1}{27}x_4=0\end{cases}.$$

亦即
$$\begin{cases} -5x_1+3x_2-9x_3-11x_4=0 \\ x_1-15x_2-9x_3-23x_4=0 \\ x_1 \qquad\quad -3x_3-2x_4=0 \\ -7x_1-3x_2+9x_3-x_4=0 \end{cases},$$

解之得 $x_1=-x_4, x_2=-x_4, x_3=-x_4$。即所求向量是$(-x_4, -x_4, -x_4, x_4)$或 $k(1, 1, 1, -1)$ 譬如 $x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=1$，$x_4=-1$，即$(1, 1, 1, -1)$就是对这两组基底有相同坐标的非零解向量。

6． 假定对 V 的基底 $\alpha_1=(a_{11}, \cdots, a_{1n})$，$\cdots, \alpha_n=(a_{n1}, \cdots, a_{nn})$，向量 $\beta=(b, \cdots, b_n)$ 的坐标是 $a_1, \cdots, a_n$，试证 $a_1, \cdots, a_n$ 是$b_1, \cdots, b_n$ 的线性组合。

证明：假定 V 的原来的基底是 $\beta_1, \cdots, \beta_n$，那末

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)=(\beta_1, \cdots, \beta_n)A, A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{n1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

A 必为满秩矩阵，存在逆矩阵 A^{-1}，设

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} k_{11}\cdots k_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{n1}\cdots k_{nn} \end{pmatrix},$$

则
$$(a_1, \cdots a_n)=(b_1, \cdots, b_n)A^{-1\prime}$$
$$=(b_1, \cdots, b_n)\begin{pmatrix} k_{11}\cdots k_{n1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{1n}\cdots k_{nn} \end{pmatrix},$$

即
$$\begin{cases} a_1=k_{11}b_1+\cdots+k_{1n}b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n=k_{n1}b_1+\cdots+k_{nn}b_n \end{cases}$$

所以 $a_1, \cdots, a_n$ 是 $b_1, \cdots b_n$ 的线性组合。

§．线 性 变 换

1． 判别下列变换中哪些是线性变换？

(1)在 R_3 中，$T(a_1, a_2, a_3)=(a_1^2, a_1+a_2, a_3)$；

(2)在由全体复数构成的复线性空间中 $T\alpha=\bar{\alpha}$；

(3)在由全体 n 阶矩阵构成的线性空间中，$T(X)=BXC$，这里 B, C 是固定矩阵；

(4)在实多项式空间中，$T[f(x)]=f'(x)$；

(5)在由闭区间$[a, b]$上全体连续函数构成的实线空间中，$T[f(x)]=\int_0^1 f(t)dt$。

解：(1)设 $\alpha_1=(a_1, a_2, a_3)$，$\alpha_2=(a_1', a_2', a_3')$，

$$T(\alpha_1+\alpha_2)=((a_1+a_1')^2,\ a_1+a_2+a_1'+a_2',\ a_3+a_3'),$$

$$T\alpha_1+T\alpha_2=(a_1^2+a_1'^2,\ a_1+a_1'+a_2^+ +a_2',\ a_3+a_3'),$$

一般
$$T(\alpha_1+\alpha_2)\neq T\alpha_1+T\alpha_2,$$
所以不是线性变换。

（2）设 k 为复数，则

$$T(k\alpha)=\overline{k\alpha}=\bar{k}\bar{\alpha}=\bar{k}T(\alpha)\neq kT(\alpha),$$

所 以 $T\alpha=\overline{\alpha}$ 不是线性变换。

（3）是线性变换，因为

$$T(X+Y)=B(X+Y)C=BXC+BYC=T(X)+T(Y),$$

$$T(kX)=B(kX)C=kBXC=kT(X)。$$

（4）是线性变换，因为

$$T[f(x)+g(x)]=[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)=T[f(x)]+T[g(x)],$$

$$T[kf(x)]=[kf(x)]'=kf'(x)=kT[f(x)]。$$

（5）是线性变换：

$$T[f(x)+g(x)]=\int_0^1[f(x)+g(x)]dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 g(x)dx$$

$$=T[f(x)]+T[g(x)],$$

$$T[kf(x)]=\int_0^1 kf(x)dx=k\int_0^1 f(x)dx=kT[f(x)]\ .$$

2. 试证 $T_1(x_1,\ x_2)=(x_2,\ -x_1)$，$T_2(x_1,x_2)=(x_1,\ -x_2)$是 R_2 的两个线性变换，并求 T_1+T_2，T_1T_2，及 T_2T_1。

证明：
$$T_1[(x_1,x_2)+(y_1,y_2)]$$

$$=T_1(x_1+y_1,x_2+y_2)=(x_2+y_2,\ -x_1-y_1)$$

$$=(x_2,\ -x_1)+(y_2,\ -y_1)$$

$$=T_1(x_1,x_2)+T_1(y_1,y_2)$$

$$=T_1[k(x_1,x_2)]$$

$$=T_1(kx_1,kx_2)=(kx_2,\ -kx_1)$$

$$=k(x_2,\ -x_1)=kT(x_1,x_2)$$

又
$$T_2[x_1,x_2)+(y_1,y_2)]=T_2(x_1+y_1,x_2+y_2)$$

$$=(x_1+y_1,\ -x_2-y_2)=(x_1,\ -x_2)+(y_1,\ -y_2)$$

$$=T_2(x_1,x_2)+T_2(y_1+y_2),$$

$$T_2[k(x_1, x_2)] = T_2(kx_1, kx_2) = (kx_1, -kx_2)$$

$$= k(x_1, -x_2) = kT_2(x_1, x_2).$$

所以，T_1，T_2 都是线性变换。

$$(T_1+T_2)(x_1, x_2) = T_1(x_1, x_2) + T_2(x_1, x_2)$$

$$= (x_2, -x_1) + (x_1 - x_2) = (x_1+x_2, -x_1-x_2);$$

$$T_1T_2(x_1, x_2) = T_1(x_1, -x_2) = (-x_2, -x_1);$$

$$T_2T_1(x_1, x_2) = T_2(x_2, -x_1) = (x_2, x_1).$$

3. 假如 α_1，α_2 是2维线性空间 V 的基底，T，S 是 V 的线性变换，$T(\alpha_1)=\beta_1$，$T(\alpha_2)=\beta_2$，如果 $S(\alpha_1+\alpha_2)=\beta_1+\beta_2$，$S(\alpha_1-\alpha_2)=\beta_1-\beta_2$，试证 $T=S$。

证明：设任意 $\alpha \in V$，则 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$。

$$T(\alpha) = T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) = T(k_1\alpha_1) + T(k_2\alpha_2)$$

$$= k_1T(\alpha_1) + k_2T(\alpha_2) = k_1\beta_1 + k_2\beta_2,$$

又 $$S(\alpha_1) = S\left[\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2) + \frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\right] = \frac{1}{2}S(\alpha_1+\alpha_2) + \frac{1}{2}S(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$= \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2) + \frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2) = \beta_1$$

同理可证 $S(\alpha_2)=\beta_2$，所以

$$T(\alpha) = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = k_1S(\alpha_1) + k_2S(\alpha_2) = S(\alpha)$$

因此 $S=T$。

4. 假如 T 是 R_2 中绕原点向反时针方向旋转 θ 的旋转，问 $-T$，T^{-1} 是怎样的旋转？两者能否一致？

解：根据定义 $(-T)\alpha = -(T\alpha)$ 所以 $-T$ 应是 R_2 中绕原点反时针旋转 $(\pi+\theta)$ 的变换。

又 T^{-1} 是 R_2 中顺时针旋转 θ 的变换。两者不一致。

5. 线性变换是否把零元变为零元，能否把非零元也变为零元？一个非零元的所有象源能否构成为一个子空间？

解：由线性变换的定义，若 $\alpha \to \alpha'$，则 $k\alpha \to k\alpha'$ 取 $k=0$，就得到 $0 \to 0$，即线性变换把零元变为零元。线性变换也能把非零元变为零元，如零变换就是这样的。

一个非零元的所有象源不能构成一个子空间；因为若 α_1，α_2 都是非零元 β 的象源，即

$$\alpha_1 \longrightarrow \beta, \qquad \alpha_2 \longrightarrow \beta,$$

则 $$\alpha_1 + \alpha_2 \longrightarrow \beta + \beta = 2\beta \neq \beta.$$

即非零元 β 的象源对加法不封闭，所以它不能构成子空间。

6. 假如 T 是 V 的线性变换，L 是 V 的子空间，如果 $TL\subseteq L$，我们就叫 L 是 T 的不变子空间，试证任意子空间都是数乘变换的不变子空间。

证明： 设 $T(\alpha)=k\alpha$，L是子空间，$l\in L$，则 $T(l)=kl\in L$，所以 $TL\subseteq L$。即任意子空间都是数乘变换 T 的不变子空间。

§ 4. 线性变换的矩阵表示

1. 求下列线性变换对所指定基底的矩阵：

（1）R_3 中将向量投影到 XOY 平面上的线性变换 T，对直角坐标轴上的单位向量 i，j，k；

（2）上述线性变换 T，对基底 $\alpha=i$，$\beta=j$，$\gamma=i+j+k$；

（3）R_3 中的线性变换 $T(a_1, a_2, a_3)=(2a_1-a_2, a_2+a_3, a_1)$，对基底 $i=(1, 0, 0)$，$j=(0, 1, 0)$，$k=(0, 0, 1)$

（4）六个函数

$$\alpha_1=e^{ax}\cos bx \qquad \alpha_2=e^{ax}\sin bx$$

$$\alpha_3=xe^{ax}\cos bx \qquad \alpha_4=xe^{ax}\sin bx$$

$$\alpha_5=\frac{1}{2}x^2e^{ax}\cos bx \qquad \alpha_6=\frac{1}{2}x^2e^{ax}\sin bx$$

系数是实数的所有线性组合构成六维实线性空间的微分变换，对以这六个向量构成的基底；

（5）在 R_3 中使

$$\begin{cases} T\alpha_1=(-5, 0, 3) \\ T\alpha_2=(0, -1, 6) \\ T\alpha_3=(-5, -1, 9) \end{cases} \qquad \text{这里} \begin{cases} \alpha_1=(-1, 0, 2) \\ \alpha_2=(0, 1, 1) \\ \alpha_3=(3, -1, 0) \end{cases}$$

的线性变换 T 对基底 α_1，α_2，α_3；

（6）上述 T 对基底 $i=(1, 0, 0)$，$j=(0, 1, 0)$，$k=(0, 0, 1)$。

解：（1） $T(i)=i+0+0$，　$T(j)=0+j+0$，　$T(k)=0+0+0$；

所求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

（2） $T(\alpha)=T(i)=i=\alpha$，　$T(\beta)=T(j)=j=\beta$

$$T(\gamma)=T(i+j+k)=T(i)+T(j)+T(k)=i+j=\alpha+\beta$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $T(i)=T(1,0,0)=(2,0,1)=2i+k$,

$T(j)=T(0,1,0)=(-1,1,0)=-i+j$,

$T(k)=T(0,0,1)=(0,1,0)=j$;

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) $T(\alpha_1)=ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx=a\alpha_1-b\alpha_2$,

$T(\alpha_2)=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx=b\alpha_1+a\alpha_2$,

$T(\alpha_3)=e^{ax}\cos bx+axe^{ax}\cos bx-bxe^{ax}\sin bx=\alpha_1+a\alpha_3-b\alpha_4$,

$T(\alpha_4)=e^{ax}\sin bx+axe^{ax}\sin bx+bxe^{ax}\cos bx=\alpha_2+b\alpha_3+\alpha x_4$,

$T(\alpha_5)=xe^{ax}\cos bx+\frac{1}{2}ax^2e^{ax}\cos bx-\frac{1}{2}bx^2e^{ax}\sin bx=\alpha_3+\alpha a_5-b\alpha_6$,

$T(\alpha_6)=xe^{ax}\sin bx+\frac{1}{2}ax^2e^{ax}\sin bx+\frac{1}{2}bx^2e^{ax}\cos bx=\alpha_4+b\alpha_5+a\alpha_6$.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}。$$

(5)设原来的基底为 $\beta_1\beta_2\beta_3$，

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}。$$

因此 $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{3}{7}\\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 0 & -5\\ 0 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

（6） $T\boldsymbol{\alpha}_1=T(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k})=-T\boldsymbol{i}+2T\boldsymbol{k}=-5\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$

$T\boldsymbol{\alpha}_2=T(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=T\boldsymbol{j}+T\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$,

$T\boldsymbol{\alpha}_3=T(3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})=3T\boldsymbol{i}-T\boldsymbol{j}=-5\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$;

从上面三式中解出 $T\boldsymbol{i}, T\boldsymbol{j}, T\boldsymbol{k}$。得

$$\begin{cases}T\boldsymbol{i}=-\frac{5}{7}\boldsymbol{i}-\frac{4}{7}\boldsymbol{j}+\frac{27}{7}\boldsymbol{k}\\ T\boldsymbol{j}=\frac{20}{7}\boldsymbol{i}-\frac{5}{7}\boldsymbol{j}+\frac{18}{7}\boldsymbol{k}\\ T\boldsymbol{k}=-\frac{20}{7}\boldsymbol{i}-\frac{2}{7}\boldsymbol{j}+\frac{24}{7}\boldsymbol{k}\end{cases}.$$

因此，
$$A=\begin{pmatrix}-\frac{5}{7} & \frac{20}{7} & -\frac{20}{7}\\ -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7}\\ \frac{27}{7} & \frac{18}{7} & \frac{24}{7}\end{pmatrix}.$$

2. 设 R_2 中线性变换 T_1 对基底 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3)$的矩阵是$\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix}$，线性变换 T_2 对基底 $\boldsymbol{\beta}_1=(3,1)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(4,2)$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}$，求变换 T_1+T_2 对 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 的矩阵，T_1T_2 对 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的矩阵。

解：设原基底为 e_1, e_2，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2)\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (\beta_1, \beta_2)\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix},$$

$$(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}^{-1} = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

所以 T_2 对于 α_1, α_2 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -57 & -95 \\ 42 & 70 \end{pmatrix}.$$

因此，T_1T_2 对于 α_1, α_2 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -57 & -95 \\ 42 & 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 65 \\ -102 & -170 \end{pmatrix}.$$

又 T_1 对于 β_1, β_2 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 38 \\ -\frac{71}{2} & -34 \end{pmatrix}$$

因此 $T_1 + T_2$ 对于 β_1, β_2 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 40 & 38 \\ -\frac{71}{2} & -34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -\frac{59}{2} & -25 \end{pmatrix}.$$

3． 设 V 为所有次数不超过 n 的多项式构成的实线性空间，T 是微分变换。对基底

$$e_0 = 1, \quad e_1 = x, \quad e_2 = \frac{x^2}{2!}, \quad \cdots, \quad e_n = \frac{x_n}{n!}$$

求 $T, T^2, \cdots, T^n$ 的矩阵，

解： $Te_0 = 0, \quad Te_1 = e_0, \quad Te_2 = x = e_1, \cdots, Te_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e_{n-1},$

$T^2e_0 = 0, \quad T^2e_1 = 0, \quad T^2e_2 = e_0, \quad \cdots, \quad T^2e_n = e_{n-2},$

…………………………………………………………………

$T^ne_0 = 0, \quad T^ne_1 = 0, \quad T^ne_2 = 0, \quad \cdots, \quad T^ne_n = e_0.$

所以 T，T^2，…，T^n 对于 $e_0, e_1, e_2 \cdots e_n$ 的矩阵分别是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \cdots\cdots, \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}。$$

4. 假定 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是线性空间 V 的基底，T 是 V 的线性 变换，如果 $\alpha_i = \alpha_i$，$i = 1, \cdots, m$，$T\alpha_j = 0$，$j = m+1 \cdots, n$。试证 $T^2 = T$，并且 T 对 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{m\text{个}} & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

证明：由题设可知

$$T(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{m\text{个}} & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

T^2 对应的矩阵为
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $$T^2 = T$$

5. 假如线性空间的线性变换 T 对任一基底的矩阵都相同，那末 T 是数乘变换。

证明：设 $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 为任意两组基底，且

$$(\beta, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \cdots \alpha_n)P$$

A 为 T 对任意一组基底的矩阵，则

$$A = P^{-1}AP, \quad 即 \quad AP = PA,$$

与任意同阶满秩矩阵能交换的矩阵必为数量矩阵（参阅教材129页），所以 A 是数量 矩阵，即 $A = kE$，于是 $T_i\alpha = k\alpha_i$，$i = 1, \cdots, n$。因此 $T(\alpha) = k\alpha$，所以 T 是数乘变换。

6. 假设线性空间的 线性变换 T，使 $T^{m-1}\alpha \neq 0$，$T^m\alpha = 0$，试证，$\alpha, T\alpha, \cdots, \alpha, T^{m-1}\alpha$ 线性无关。

证明：设 $k_1\alpha + k_2T(\alpha) + \cdots + k_mT^{m-1}(\alpha) = 0$

作 T^{m-1} 的变换：

$$T^{m-1}[k_1\alpha + k_2T(\alpha) + \cdots + k_mT^m(\alpha)] = k_1T^{m-1}(\alpha) + k_2T^m(\alpha) + \cdots + k_mT^{2m-2}(\alpha) = 0$$

即
$$k_1T^{m-1}(\alpha)=0$$
但 $T^{m-1}(\alpha)\neq 0$，所以 $k_1=0$ 于是原式成为
$$k_2T(\alpha)+\cdots+k_mT^{m-1}(\alpha)=0$$
再作变换 T^{m-2} 得
$$T^{m-2}[k_2T(\alpha)+\cdots+k_mT^{m-1}(\alpha)]=k_2T^{m-1}(\alpha)=0$$
所以 $k_2=0$。继续同样地进行，后最可得
$$k_1=k_2=\cdots=k_m=0,$$
从而，$\alpha, T(\alpha),\cdots,T^{m-1}(\alpha)$，线性无关。

7． 试证明：n 维线性空间 V 中所有线性变换，对于加法及数积构成 n^2 维线性空间。

证明：设 T_1, T_2 是 V 的线性变换，则 T_1+T_2 是 V 的线性变换，kT_1 也是 V 的线性变换。

容易证明线性变换的加法满足交换律和结合律。数乘满足分配律，结合律，于是 V 的所有线性变换形成一个线性空间。

n 维线性空间 V 的基底取定以后，V 的线性变换可与 n 阶矩阵一一对应。即有一个线性变换就有一个 n 阶矩阵，反过来有一个 n 阶矩阵也就有一个线性变换，线性变换不同，矩阵也不相等，矩阵不相等，线性变换就不同，因为所有的 n 阶矩阵构成 n^2 维线性空间，所以 V 的所有线性变换也构成一个 n^2 维线性空间。

第八章 内积空间

§1. 内积空间的概念

1. 在三维空间 R_3 内，如果任意两向量对应实数$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$为

（1） $|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|$

（2） $|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos^3\theta$，$\theta$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角；

（3） $2|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|\cos\theta$，$\theta$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角。

问它们是不是内积？

解：（1） $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=|\alpha|\cdot|\boldsymbol{\beta}|$ 不是内积，因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2|\cdot|\boldsymbol{\beta}|\neq|\boldsymbol{\alpha}_1|\cdot|\boldsymbol{\beta}|+|\boldsymbol{\alpha}_2|\cdot|\boldsymbol{\beta}|。$$

（2） $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos^3\theta$ 不是内积，因为

$$(\alpha_1+\alpha_2,\boldsymbol{\beta})=|\alpha_1+\alpha_2|\cdot|\boldsymbol{\beta}|\cos^3\theta\neq|\alpha_1|\cdot|\boldsymbol{\beta}|\cos^3\theta_1+|\alpha_2||\boldsymbol{\beta}|\cos^3\theta_2。$$

（3） $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=2|\alpha|\cdot|\boldsymbol{\beta}|\cos\theta$ 是内积，因为若

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3),\ \boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3),$$

则 $$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3。$$

显然满足内积各条件。

2. 假设 n 维实线性空间的基底是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\alpha_n$，向量 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n$，$\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 对应 实数 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum\limits_{i=1}^{n}ia_ib_i$，试问 V 是否是内积空间？

解：$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum\limits_{i=1}^{n}ia_ib_i=\sum\limits_{i=1}^{n}ib_ia_i=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$,

$$(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{n}ika_ib_i=k\sum_{i=1}^{n}ia_ib_i=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\gamma)=\sum_{i=1}^{n}i(a_i+b_i)c_i=\sum_{i=1}^{n}ia_ic_i+\sum_{i=1}ib_ic_i=(\boldsymbol{\alpha},\gamma)+(\boldsymbol{\beta},\gamma),$$

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\sum_{i=1}^{n}ia_ia_i\geqslant0\ ;$$

满足内积各条件，所以 V 是内积空间。

3. 假设，$\boldsymbol{\alpha}$ $\boldsymbol{\beta}$ 是内积空间的两个非零向量，其夹角为 θ。$\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\beta}$，试证明。

（1） $k>0$ 的充要条件是 $\theta=0$

（2） $k<0$ 的充要条件是 $\theta=\pi$

证明：（1） 若 $k>0$，由 $\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\beta}$ 得

$$\cos\theta=\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}=\frac{k(\beta,\beta)}{|k||\beta|^2}=1.$$

所以 $\theta=0$，反之若 $\theta=0$，

则 $$\cos\theta=\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}=\frac{k|\beta|^2}{|\alpha||\beta|}=\frac{k|\beta|}{|\alpha|}=1.$$

所以 $k>0$，

（2） $k<0$，$\cos=\frac{k(\beta,\beta)}{|k||\beta|^2}=-1$.

所以 $\theta=\pi$，反之，$\theta=\pi$时，

$$\cos\theta=\frac{k|\beta|^2}{|\alpha||\beta|}=\frac{k|\beta|}{|\alpha|}=-1.$$

所以 $k<0$，

4. 假设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是内积空间的一组向量，试证明：

$$\begin{vmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)\cdots(\alpha_1,\alpha_m)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\alpha_m,\alpha_1)\cdots(\alpha_m\alpha_m)\end{vmatrix}\neq 0$$

的充要条件是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关。

证明：设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$

则 $$\begin{cases}k_1(\alpha_1,\alpha_1)+\cdots+k_m(\alpha_m,{}_1)=0\\ k_1(\alpha_1,\alpha_2)+\cdots+k_m(\alpha_m,\alpha_2)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ k_1(\alpha_1,\alpha_m)+\cdots+k_m(_m,\alpha_m)=0.\end{cases}$$

因为方程组只有零解 $k_1=0, \cdots, k_n=0$，的充要条件是 $A=|(\alpha_i,\alpha_j)|\neq 0$，所以论证成立。

§2. 标准正交基底

1. 次数不超过3的所有实系数多项式根据

$$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx,$$

成为内积空间，试求它的一组标准正交基底。

解：取 $\alpha_1=1$，$\alpha_2=x$，$\alpha_3=x^2$，$\alpha_4=x^3$ 为它的基底，把它们正交化、取 $\beta_1=\alpha_1=1$，设 $\beta_2=k\beta_1+\alpha_2$

$$(\alpha_2,\beta_1)=\int_{-1}^{1}xdx=0,\ k=-\frac{(\alpha_2,{}_1\beta)}{(\beta_1,\beta_1)}=0,$$

所以 $\beta_2=x$，再 $\beta_3=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\alpha_3$，因为

$$(\alpha_3,\beta_1)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3},\ (\beta_1,\beta_1)=\int_{-1}^{1}dx=2,$$

$$(\alpha_3,\beta_2)=\int_{-1}^{1}x^3dx=0,\quad (\beta_2,\beta_2)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3},$$

所以 $$k_1=-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-\frac{1}{3},\quad k_2=-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}=0$$

因此 $\beta_3=x^2-\dfrac{1}{3}$ 又 $\beta_4=k_1'\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+\alpha_4$，因为

$$(\alpha_4,\beta_1)=\int_{-1}x^3dx=0,\quad (\alpha_4,\beta_2)=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{2}{5}$$

$$(\alpha_4,\beta_3)=\int_{-1}^{1}x^3\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx=0,\quad (\beta_3,\beta_3)=\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2dx=\frac{8}{45},$$

所以 $$k_1'=-\frac{(\alpha_4,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=0,\quad k_2'=-\frac{(\alpha_4,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}=\frac{3}{5},\quad k_3'=-\frac{(\alpha_4,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}=0.$$

因此 $\beta_4=x^3-\dfrac{3}{5}x$. 再将它们单位化：

$$|\beta_1|^2=(\beta_1,\beta_1)=2,\qquad \eta_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$|\beta_2|^2=(\beta_2,\beta_2)=\frac{2}{3},\qquad \eta_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{\sqrt{6}}{2}x,$$

$$|\beta_3|^2=\frac{8}{45},\qquad \eta_3=\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1),$$

$$|\beta_4|^2=\frac{8}{175},\qquad \eta_4=\frac{\sqrt{14}}{4}(5x^3-3x)$$

那么 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 就是一组标准正交基底。

2. 假设 n 维内积空间的基底为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，任意元 $\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$ 的坐标 $x_j=|\alpha|\cos\theta_j$，这里 θ_j 是 α 与 α_j 夹角，那末 $\alpha_1,\cdots\ \alpha_n$ 是标准正交基底。

证明： 当 $x=\alpha_i$ 时，它的坐标是 $x_j=\delta_{ij}$，又 $x_j=|\alpha_i|\cos\theta_j$，$\theta_j$ 是 α_i 与 α_j 的夹角，所以

$$|\alpha_i|\cos\theta_j=\delta_{ij}$$

即 $|\alpha_i|=1$，而 $j\neq i$ 时 $\cos\theta_j=0$，因此 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 都是单位向量，并且彼此垂直，所以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是标准正交基底。

3. 假设 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 是内积空间的标准正交基底，试证 V 的向量 $\beta,\cdots,\beta_n$ 两两正交的

充要条件是

$$\sum_{t=1}^{n}(\beta_i, \alpha_t)(\beta_j, \alpha_t)=0, \quad i\neq j.$$

证明：设 $\beta_i=b_{i1}\alpha_1+\cdots+b_{in}\alpha_n$，

$$(\beta_i, \alpha_t)=b_{it}, \qquad (\beta_j, \alpha_t)=b_{jt},$$

于是
$$\sum_{t=1}^{n}(\beta_i, \alpha_t)\ (\beta_j, \alpha_t)=\sum_{t=1}^{n}b_{it}b_{jt},$$

而
$$\begin{aligned}(\beta_i, \beta_j)&=(b_{i1}\alpha_1+\cdots+b_{in}\alpha_n,\ b_{j1}\alpha_1+\cdots+b_{jn}\alpha_n)\\&=\sum_{t=1}^{n}(b_{it}\alpha_t, b_{jt}\alpha_t)=\sum_{t=1}^{n}b_{it}b_{jt},\end{aligned}$$

所以
$$\sum_{t=1}^{n}(\beta_i, \alpha_t)(\beta_j, \alpha_t)=(\beta_i, \beta_j).$$

因此 $(\beta_i, \beta_j)=0$，$i\neq j$ 的充要条件是

$$\sum_{t=1}^{n}(\beta_i, \alpha_t)(\beta_j, \alpha_t)=0, \qquad i\neq j$$

4． 假定 U_1，U_2 是内积空间 U 的子空间，求证：

（1） $(U^{\perp})^{\perp}=U$； （2） $(U_1\cap U_2)^{\perp}=U_1^{\perp}+U_2^{\perp}$

证明：（1） 显然 $(U^{\perp})^{\perp}\supseteq U$，再因为

$$\dim(U^{\perp})^{\perp}=n-\dim(U^{\perp})=n-(n-\dim(U))=\dim U,$$

所以 $(U^{\perp})^{\perp}=U$。

（2） 由 $(U_1+U_2)^{\perp}=U_1^{\perp}\cap U_2^{\perp}$ 得

$$(U_1^{\perp}+U_2^{\perp})^{\perp}=(U_1^{\perp})^{\perp}\cap(U_2^{\perp})^{\perp}=U_1\cap U_2.$$

所以
$$(U_1\cap U_2)^{\perp}=((U_1^{\perp}+U_2^{\perp})^{\perp})^{\perp}=U_1^{\perp}+U_2^{\perp}.$$

§ 3. 正 交 变 换

1． 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是内积空间 V 的标准正交基底，试求 V 的一个正交变换 T，使

$$T\alpha_1=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3,$$

$$T\alpha_2=\frac{2}{3}\alpha_1-\frac{1}{3}\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3.$$

解：设 $T\alpha_3=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，那末 T 对于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & x_1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & x_2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & x_3 \end{pmatrix}$$

因为 T 是正交变换，所以 A 是正交矩阵，由 $AA'=E$，得

$$x_1^2=\frac{1}{9},\quad x_2^2=\frac{4}{9},\quad x_3^2=\frac{4}{9},\quad x_1x_2+\frac{2}{9}=0$$

$$x_2x_3-\frac{4}{9}=0,\quad x_1x_3+\frac{2}{9}=0$$

所以

$$x_1=\frac{1}{3},\quad x_2=-\frac{2}{3},\quad x_3=-\frac{2}{3}$$

或 $$x_1=-\frac{1}{3},\quad x_2=\frac{2}{3},\quad x_3=\frac{2}{3}.$$

即所求变换为 $$T\alpha_3=\frac{1}{3}\alpha_1-\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{2}{3}\alpha_3$$

或 $$T\alpha_3=-\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3$$

2． 假设 **i**、**j**、**k** 是 R_3 的标准正交基底， 试求 R_3 的一个正交变换 T， 使 Tk 为平面 $x+y-1=0$ 的单位法向量。

解：显然，这样的正交变换不止一个，譬如矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的变换就是这样的一个正交变换

3． 假如内积空间 V 中向量 α 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的长相同，那么 V 有正交变换 T，使 $T\alpha=\beta$。

证明：因为$|\alpha|=|\boldsymbol{\beta}|\neq 0$，所以 V 有标准正交基底

$$\alpha_1=\frac{\alpha}{|\alpha|},\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \text{ 及 } \beta_1=\frac{\beta}{|\beta|},\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_n$$

使 $T\alpha_i=\beta_i$ 的线性变换 T 也使 $T\alpha=\beta$，因此 T 就是所求的正交变换。

4． 假设内积空间 V 中$|\alpha_1|=|\boldsymbol{\beta}_1|$，$|\alpha_2|=|\boldsymbol{\beta}_2|$， 且$(\alpha_1,\alpha_2)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$， 那末 V 有正交变换 T，使得 $T\alpha_1=\boldsymbol{\beta}_1$，$T\alpha_2=\boldsymbol{\beta}_2$

证明：当 α_1， α_2 线性相关时， 设 $\alpha_2=k\alpha_1$于是由$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=(\alpha_1,\alpha_2)$及 $|\boldsymbol{\beta}_2|=|\alpha_2|$ 得

$$(\beta_1, \beta_2) = k(\alpha_1, \alpha_1) = k(\beta_1, \beta_1)$$

$$(\beta_2, \beta_2) = k^2(\alpha_1, \alpha_2) = k^2(\beta_1, \beta_1) = k(\beta_1, \beta_2)$$

即 $$(\beta_1, \beta_2 - k\beta_1) = 0,\ (\beta_2 - k\beta_1, \beta_2) = 0$$

因此 $$(\beta_2 - k\beta_1, \beta_2) - k(\beta_1, \beta_2 - k\beta_1) = (\beta_2 - k\beta_1, \beta_2 - k\beta_1) = 0$$

所以 $\beta_2 = k\beta_1$，于是由习题3，使 $T\alpha_1 = \beta_1$ 的正交变换也使 $T\alpha_2 = \beta_2$，因此 T 就是所求的正交变换。

当 α_1, α_2 线性无关时，根据柯亚一许瓦兹不等式有

$$(\alpha_1, \alpha_2)^2 < (\alpha_1, \alpha_2)(\alpha_2, \alpha_2)$$

因此 $$(\beta_1, \beta_2)^2 < (\beta_1, \beta_1)(\beta_2, \beta_2),$$

所以 β_1, β_2 也线性无关，把 V 的基底 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 及 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 单位化正交化得标准正交基底 $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n'$ 及 $\beta_1', \beta_2', \cdots, \beta_n'$，因为 $\alpha_2' = k\alpha_1' + \alpha_2$ 时 $\beta_2' = k\beta_1' + \beta_2$。所以使 $T\alpha_i' = \beta_i'$ 的正交变换 T 也有

$$T(k\alpha_1' + \alpha_2) = k\beta_1' + \beta_2$$

即 $$T\alpha_2 = \beta_2$$

所以 T 就是所求的正交变换。

5. 假设 T 是内积空间 V 的正交变换，U 是V 对于 T 的不变空间，那么 $U^\perp$ 也是 V 对于 T 的不变子空间。

证明：设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 为 U 的标准正交基底，

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_m,\ \alpha_{m+1},\ \cdots \alpha_n$$

是 V 的标准正交基底。因为 T 是正交变换，所以 $T\alpha_1, \cdots, T\alpha_n$ 也是 V 的标准正交基底，因为 U 是不变子空间，所以 $T\alpha_1, \cdots, T\alpha_m$ 是 U 的标准正交基底。因此 $\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n$ 及 $T\alpha_{m+1}, \cdots T\alpha_n$ 都是 $U^\perp$ 的标准正交基底。如果$\alpha \in U^\perp$，那末

$\alpha = k_{m+1}\alpha_{m+1} + \cdots + k_n\alpha_n$，　$T\alpha = k_{m+1}T\alpha_{m+1} + \cdots + k_nT\alpha_n \in U^\perp$ 所以 $U^\perp$ 是 T 的不变子空间。

§ 4. 复内积空间

对下列厄米特矩阵 A，求酉矩阵 U 使 $U^{-1}AU$ 成对角形

(1) $$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{6} & \frac{i}{2\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{6}} & -\frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

解(1)特征方程

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -i & -1 \\ i & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-2\lambda=0$$

所以特征根：$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\sqrt{2}$，$\lambda_3=-\sqrt{2}$；求特征向量：

① $\lambda_1=0$，由$(\lambda E-A)X_1=0$得

$$\begin{cases} -ix_2-x_3=0 \\ ix_1=0 \\ -x_1=0 \end{cases}$$

解得 $X_1=(0,ix_3,x_3)$，由$(X_1,X_1)=1$得 $x_3=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 取 $X_1=\left(0,\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

② $\lambda_2=\sqrt{2}$，由$(\lambda E-A)X_2=0$ 得

$$\begin{cases} \sqrt{2}x_1-ix_2-x_3=0 \\ ix_1+\sqrt{2}x_2=0 \\ -x_1+\sqrt{2}x_3=0 \end{cases}$$

解得 $X_2=(\sqrt{2}x_3,-ix_3,x_3)$，据$(X_2,X_2)=1$

取 $X_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{i}{2},\frac{1}{2}\right)$

③ $\lambda=-\sqrt{2}$，同样可解得$X_3=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{i}{2},\frac{1}{2}\right)$

所以

$$U=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2)特征方程

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{i}{6} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \lambda-\frac{1}{6} & \frac{-i}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{2\sqrt{3}} & \lambda-\frac{1}{2} \end{vmatrix}=0$$

即 $\lambda^2(\lambda-1)=0$，所以 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=1$，求特征向量：$\lambda=0$，由 $(\lambda E-A)X=0$ 得

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x_1+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}x_2+\dfrac{i}{\sqrt{6}}x_3=0 \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}}x_1-\dfrac{1}{6}x_2-\dfrac{i}{2\sqrt{3}}x_3=0 \\ -\dfrac{i}{\sqrt{6}}x_1+\dfrac{i}{2\sqrt{3}}x_2-\dfrac{1}{2}x_3=0 \end{cases}$$

解得 $X_1=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 1,\ 0\right)$，$X_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i,\ 0,\ 1\right)$

正交化，单位化得：

$$e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ 0\right),\quad e_2=\left(\frac{i}{\sqrt{3}},\ -\frac{i}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\lambda=1$时，由$(\lambda E-A)X=0$得

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}x_1+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}x_2+\dfrac{i}{\sqrt{6}}x_3=0 \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}}x_1+\dfrac{5}{6}x_2-\dfrac{i}{2\sqrt{3}}x_3=0 \\ -\dfrac{i}{\sqrt{6}}x_1+\dfrac{i}{2\sqrt{3}}x_2+\dfrac{1}{2}x_3=0 \end{cases}$$

解得 $X=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}ix_3,\ \dfrac{i}{\sqrt{3}}x_3,\ x_3\right)$

由$(X,X)=1$ 得 $x_3=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，取

$$X=\left(-\frac{i}{\sqrt{3}},\ \frac{i}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

所以
$$U=\begin{pmatrix} \dfrac{i}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{i}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{i}{\sqrt{6}} & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \dfrac{i}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$